David Gomes Costa

Uma Abordagem Semântico-Pragmática para Classificação e Definição de Quantificadores

Natal/RN

28 de fevereiro de 2020

David Gomes Costa

Uma Abordagem Semântico-Pragmática para Classificação e Definição de Quantificadores

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia Formal como requisito final para obtenção do título de Doutor.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

CENTRO DE CIÊNCIAS HUMANAS, LETRAS E ARTES

Programa de Pós-graduação em Filosofia da UFRN.

Linha de Pesquisa: Filosofia Analítica.

Orientador: Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves

Natal/RN

28 de fevereiro de 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial do Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes - CCHLA

Costa, David Gomes.
Uma abordagem semântico-pragmática para classificação e definição de quantificadores / David Gomes Costa. - Natal, 2020.
153f.: il.

Tese (doutorado) - Centro de Ciências Humanas, Letras e Artes, Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves.

1. Lógica - Tese. 2. Pragmática - Tese. 3. Quantificação - Tese. I. Alves, Daniel Durante Pereira. II. Título.

RN/UF/BS-CCHA CDU 16

Elaborado por Heverton Thiago luiz da Silva - CRB-15/710

David Gomes Costa

Uma Abordagem Semântico-Pragmática para Classificação e Definição de Quantificadores

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia Formal como requisito final para obtenção do título de Doutor.

Trabalho aprovado. Natal/RN, 28 de fevereiro de 2020:

Prof. Dr. Daniel Durante Pereira Alves
Orientador

Samir Bezerra Gorsky
Membro interno

Prof. Dr. Hércules de Araujo Feitosa
Membro externo (UNESP - Bauru)

Professor Dr. André Nascimento Pontes
Membro externo (UFAM - Manaus)

Professor Dr. Adriano Marques da Silva
Membro externo (FAFIC - Cajazeiras)

Natal/RN
28 de fevereiro de 2020

Dedico às lições irretocáveis, aos sorrisos inapagáveis e à história exemplar de tia França e de tia Zefa.

Dedico à mais faustosa das vidas, a genuinamente simples, de Dna. do Carmo e Seu Varela.

Agradecimentos

A todos e a cada um que pouco ou muito se mostraram preocupados com este meu grande esforço em promover qualquer pequeno avanço nesta área, que, na maioria dos casos, é negligenciada. É grande a alegria de saber que isso se aplica a quase todos os que eu conheço, que em nenhum momento me deixaram esquecer que sou único.

Finalizada a abstinência do uso de termos quantificadores sem qualquer cuidado, agradeço particularmente a minha mãe, minha irmã e minha esposa por todo o amor que foi condição para todo o resto. Agradeço a Daniel Durante pelo direcionamento de um pouco de sua competência extraordinária à orientação deste trabalho com paciência e atenção. Agradeço a Flammarion e Calenice, Lony, Patrick, Arthur, Alexandre e Angélica, Max e Ingrid, Stanley, Táscya, Paulo Aparecido, Paulo Boa Sorte e Leona, Nassib e Ingrid, Marcelo e a Márcia pelo companheirismo, alguns destes também agradeço pelas cervejas. Agradeço a Hudson, João Daniel, Sanderson, Evelyn e Thiago pela caminhada juntos nessa jornada, e pela certeza de que criamos laços que nos manterão juntos nas próximas jornadas. Agradeço a Morganna, Fenja, Órion, Milena, Alice, Olívia, Stella, Lucca e Luy, Murilo, Lavínia pela esperança. Agradeço a minha instituição de origem, o IFAL, pela possibilidade de afastamento para realização dos últimos dois anos de doutorado. E agradeço a Táscya Morganna, por ser tantas e uma só.

Resumo

Expressões quantificadoras estão na história da filosofia e da lógica pelo menos desde a criação do silogismo por Aristóteles. Outro momento central na história dessas expressões é o desenvolvimento do sistema formal do *Begriffsschrift* de Frege. Em seu trabalho, o autor inclui axiomas para quantificação sobre objetos individuais e conceitos. Sendo os quantificadores também um tipo de conceito, ele os denomina "conceitos de segundo nível". Com o advento da teoria dos modelos (na década de 1950) a noção semântica de "interpretação" promove uma revolução copernicana neste campo de estudo e na maneira de definir os "conceitos" fregeanos, com ênfase nas expressões quantificadoras. Tal revolução não consiste simplesmente em uma nova forma de apresentar os quantificadores de Frege, mas possibilitou uma ampliação na variedade de quantificadores que podem ser implementados. Essa abertura a novas possibilidades é devida, basicamente, aos trabalhos de Mostowski (1957) e Lindström (1966) que desenvolvem a noção de quantificação generalizada. Existem, no entanto, limites tanto nessa implementação quanto na interpretação de certos quantificadores de línguas naturais. A dependência de uma expressão a um contexto é uma das barreiras que a linguagem natural impõe à lógica formal. Nesse sentido Grice em 1975 abre espaço em seu *Logic and Conversation* para um outro olhar sobre a "lógica da linguagem ordinária". O presente trabalho se propõe a uma análise nas diversas tentativas de formalização de quantificadores em linguagens naturais. Partimos de uma abordagem que investigue aspectos lógicos e pragmáticos dos quantificadores. Visamos uma classificação de quantificadores que acreditamos ser capaz de elucidar questões sobre os limites de definições destas expressões.

Palavras-chave: Lógica. Quantificação. Semântica. Pragmática. Filosofia da Linguagem.

Abstract

Quantifying expressions have been part of the history of philosophy and logic at least since Aristotle's creation of syllogism. Another pivotal moment in the history of these expressions is the introduction of the formal system in Frege's Begriffsschrift, which includes axioms for quantifying individual objects and concepts. Since quantifiers are also a type of concept, Frege calls them "second-level concepts". With the advent of model theory (in the 1950s) the semantic notion of "interpretation" promotes a Copernican revolution in this field of study and in the way of defining Fregean "concepts", by emphasizing on quantifying expressions. Such a revolution does not merely consist of a new way of presenting Frege's quantifiers but has made it possible to expand the range of quantifiers that can be implemented. This opening to new possibilities is due, basically, to the work of Mostowski (1957) and Lindström (1966) that develop the notion of generalized quantification. There are, however, limits both to this implementation and to the interpretation of certain natural language quantifiers. The dependence of an expression on a context is one of the barriers that natural language imposes on formal logic. In this sense, Grice in 1975 makes room in his 'Logic and Conversation' for another look at the "logic of ordinary language". This thesis proposes an analysis of the various attempts to formalize quantifiers in natural languages. We start from an approach that investigates logical and pragmatic aspects of quantifiers and aim at a classification of quantifiers that we believe can elucidate problems on the limits of definitions of these expressions.

Keywords: Logic. Quantification. Semantics. Pragmatic. Philosophy of Language.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Árvore de Barwise 19
Figura 2 – Quadrado aristotélico das oposições 19
Figura 3 – EXT Representação 46
Figura 4 – Conservatividade em Linguagem Natural 48
Figura 5 – CONS Representação 48
Figura 6 – Exemplos de não INT 50
Figura 7 – Pós-complemento $\geq \frac{1}{3}$ 74
Figura 8 – Pós-complemento $< \frac{1}{3}$ ou dual de $\geq \frac{1}{3}$ 75
Figura 9 – Quadrado de quantificadores proporcionais 75
Figura 10 – Quadro de quantificadores naturais e proporcionais 81

Lista de tabelas

Tabela 1 – Conjunto Rel 41
Tabela 2 – Conjunto imagem da função $f(Rel)$ 43
Tabela 3 – **3.1.d** 97
Tabela 4 – Quantificadores Básicos Abstratos 116
Tabela 5 – Triângulo Numérico 124
Tabela 6 – Representação de Quantificadores no Triângulo Numérico 124
Tabela 7 – Ao menos um terço 126
Tabela 8 – A medida de A 141
Tabela 9 – A medida de $\mathbf{Q}^{gp}$ 142

Lista de abreviaturas e siglas

DOM	Domínio
HOM	Homomorfismo
ISOM	Fechamento sobre Isomorfismo *ver* **1.3.a**
PERM	Fechamento sobre Permutação
Mon	Monótono ou Monotonicidade quando se tratar da propriedade
EXT	Expansão *ver* **1.3.b**
CONS	Conservatividade *ver* **1.3.c**
INT	Intersecividade *ver* **1.3.d**
CARD	Cardinalidade *ver* **1.3.e**
FPFS	Família Própria Fechada Superiormente
sse	Se e somente se
Rel	Relação
Quant.	Quantificador
MP	*Modus Ponens*
Hip. Ind. ou HI	Hipótese Indutiva
DET	Para *determiner* ou determinante
FO(L)	*First Order (Logic)*
PB	Português Brasileiro
SN	Sintagma Nominal
SV	Sintagma Verbal

Lista de símbolos

α, β, θ, ϕ, ψ, λ	Letras gregas usadas como variável para fórmulas.
Q	Variável para Quantificador Generalizado
$\mathbf{Q}$	Conjunto das relações que definem um quantificador Q
Q^R	Usado para o quantificador de Rescher
Q^i	Usado para o quantificador de infinitude
Q^I	Usado para o quantificador de igualdade de cardinalidade
Q^H	Usado para o quantificador de Henkin
Q^{par}	Usado para o quantificador de paridade na cardinalidade de um conjunto
Q^{more}	Usado para o quantificador de cardinalidade maior
Q^{Ma}	Usado para o quantificador "A Maioria"
Q^{Mi}	Usado para o Quantificador "A Minoria"
Q^{gp}	Usado para o Quantificador "Grande Parte"
Q^{pp}	Usado para o Quantificador "Pequena Parte'
Q^{qt}	Usado para o Quantificador "Quase Todo"
Q^{qn}	Usado para o Quantificador "Quase Nenhum"
$Q^{\forall}$	Usado para o Quantificado Universal de tipo $\langle 1, 1\rangle$
$Q^{\exists}$	Usado para o Quantificado Existencial de tipo $\langle 1, 1\rangle$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}$	Conjuntos dos números Naturais e Reais, respectivamente
$\in$	Pertence
$P(X)$	Conjunto potência de um conjunto X
$\cap$	Interseção
$\subseteq$	Inclusão
$\subset$	Inclusão própria

$\succ, \prec$	Relação de ordem
γ^d	Dual de uma constante γ
$\lvert\gamma\rvert$	Cardinalidade de γ
M	Usado para Domínios arbitrários *exceto* p. 35 onde se apresenta o quantificador de Rescher.
$\mathbf{M}$	Usado para modelo de um domínio M de primeira ordem
$\mathcal{M}$	Usado para modelos que mais complexos do que os de primeira ordem
μ	Usado para representar medidas
$\models$	Relação de consequência semântica em um modelo
$\wedge$	Constante lógica de conjunção
$\vee$	Constante lógica de disjunção
$\neg$	Constante lógica de negação
$\rightarrow$	Constante de lógica de implicação
$\exists$	Quantificador clássico existencial
$\forall$	Quantificador clássico universal
$-$	Subtração ou diferença por determinação do uso
f	Para funções arbitrárias
R	Para relações arbitrárias, utilizado no capítulo 4 como relação que define um quantificador
$R_{p.o}$	Usado para relações entre conjuntos, que definem um quantificador de Primeira Ordem
R_c	Usado para relações entre conjuntos, que definem um quantificador cardinal
R_f	Usado para relações entre conjuntos, que expressam quantificadores definíveis por filtros
R_e	Usado para relações entre conjuntos, que definem um quantificador escalar
$\geq, >$	Maior ou igual e maior, respectivamente

$\leq$, $<$	Menor ou igual e menor, respectivamente
», «	Usado para representar uma relação nas escalas entre expressões quantificadoras
$\langle n_1, ..., n_k \rangle$	Enupla ordenada, usada em exaustão para indicar o tipo semântico de um quantificador
L	Para linguagens formais arbitrárias
ω, ω_1	Usados para representar cardinalidades finitas e infinitas enumeráveis, respectivamente
$\mathcal{F}$	Usado para representar um filtro
$\mathcal{U}$	Usado para representar um ultrafiltro
$\mathcal{I}$	Usado para representar um Ideal

Sumário

INTRODUÇÃO **16**

1 BARREIRAS PARA A DEFINIÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE TERMOS QUANTIFICADORES **27**

1.1 Uma reflexão sobre o processo para a interpretação **27**

1.2 Definições e tipos. **32**

1.3 Propriedades dos quantificadores. **39**

1.4 Definibilidade, expressabilidade e logicidade de quantificadores. . . . **51**

1.4.1 Definição 53

1.4.2 Expressão 55

1.4.3 Logicidade 61

2 PRECISIFICAÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE QUANTIFICADORES 70

2.1 Uma estratégia inócua de precisificação. **70**

2.2 Abordagens Lógicas de Quantificadores não Convencionais **83**

2.2.1 Primeiras Propostas 83

2.2.2 Definir quantificadores é como definir famílias 86

2.2.2.1 Modulando uma ideia 91

3 PRAGMÁTICA E PROBLEMAS SIMILARES **95**

3.1 IMPRECISÃO **95**

3.1.1 Teorias da Vagueza 98

3.1.2 A Precisão Sortal 100

3.1.3 Indexicais 105

3.2 Entre a semântica e o contexto **106**

3.2.1 Implicaturas convencionais 106

3.2.2 Implicatura Conversacional 107

3.2.3 A pragmática e o problema dos quantificadores 109

4 CLASSIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE QUANTIFICADORES **114**

4.1 Quantificadores em Questão **114**

4.1.1 Materialmente Possível x Interessante 116

4.2 O Que têm em Comum? **118**

4.2.1 Separação por Propriedades - A relação R 120

4.2.1.1 Triângulo Numérico 123

4.2.2 Quantificadores não Cardinais 127

4.2.2.1 Q^{qt} tipo $\langle 1,1 \rangle$ 129
4.2.3 Categorias R_f e R_e, o quadro definitivo. 131
4.2.3.1 Uma estrutura para a categoria R_e 135
4.2.3.2 Especificando a Medida 140
4.2.4 Uma medida Escalar 142
4.3 Considerações Finais 144

REFERÊNCIAS 148

APÊNDICES 152

APÊNDICE A – $Q^{\forall}$ NÃO É INT 153

APÊNDICE B – INTERDEFINIÇÃO ENTRE $\forall$ E $Q^{\forall}$ 154

INTRODUÇÃO

Abriremos este trabalho com uma alegoria que pretende sintetizar alguns dos problemas motivadores da pesquisa e da tese.

Num ambiente estranhamente polarizado, um sindicalista esperto decidiu arcar sozinho com uma greve em sua pequena e afastada unidade de trabalho. Interessado em avolumar a greve e percebendo que não tinha voz de comando no seu local de trabalho, o sindicalista foi à TV local e declarou de modo forte e emocionado:

"A sociedade precisa nos ouvir. Nossas reivindicações são legítimas e representam o sentimento de servidores de nossa instituição, pois parte dos servidores já aderiu à greve."

A declaração do sindicalista alarmou outros trabalhadores de fora de sua unidade e inclusive da matriz da instituição. Surgiu um sentimento de que, se a sociedade precisa ouvir os grevistas, antes dela os próprios servidores precisariam ouvir aquela parte de servidores que têm legítimas reivindicações. Assim, se formou a maior greve daquela instituição, e agora, falando em nome de um grupo que contemplava 95% dos servidores da instituição, o sindicalista havia conquistado seus colegas de unidade, com uma exceção apenas, seu chefe. A greve prosseguiu com duras críticas ao governo, municipal, estadual e nacional e por fim acabou, meses depois. As reivindicações foram atendidas em pequena medida e por promessas do governo, como sempre. Essa greve, no entanto, deixou uma mácula naquela instituição. O grupo, tão grande quanto era, já parecia falar em nome da instituição e nesse caso fica estranho, bem estranho, atacar o governo. A câmara dos vereadores se sentiu particularmente ofendida pelas críticas. Era a hora do chefe, o único que não havia feito greve, falar em nome da instituição aos vereadores da cidade. Com uma grande pressão política e em frente às câmeras da mesma TV que deu a notícia da greve o chefe falou de modo calmo e ponderado:

"Os senhores precisam desvincular a imagem dos manifestantes da imagem de nossa instituição. Não foram todos, senão alguns servidores que aderiram à greve. Nossa instituição tem 5.000 servidores e muitos não participaram da greve, tantos que nem caberiam nesta sala."

Os vereadores sentiram que tinham algum respaldo dentro da instituição, a sociedade se conformou com as explicações dadas pelo chefe, o sindicalista e grande parte dos grevistas se indignaram com o que foi dito, grande parte dos grevistas, por outro lado, não. Houve acusação de mentiras em ambos os lados, mas ninguém nunca provou. Esta não é uma história de um lugar qualquer, mas de um país onde os habitante são filhos dos antigos moradores de uma, também antiga, ilha. Diferenças essenciais os separavam em dois grupos

na ilha por anos, mas resolvidos todos os problemas resolveram casar entre si, dando origem à etnia dos Cavalhosos.

Esta alegoria centraliza alguns exemplos de problemas de maneira lúdica e finaliza-se com uma homenagem a Raymond Smullyan[1] neste ano de seu centenário. A razão para essa brincadeira com os enigmas de Smullyan é que não parece tão direto decidir se algumas das afirmações do Chefe e do sindicalista são verdadeiras ou não. As afirmações problemáticas dizem respeito especificamente à sua maneira de expressar quantidades. Vamos destacar aqui, e refletir um pouco mais a frente, sobre as declarações "parte dos servidores aderiu à greve", "alguns servidores aderiram à greve" e "muitos servidores não participaram da greve". Além disso, vamos manter em evidência o fato de que "grande parte dos grevistas se indignou e grande parte não". Enquanto o leitor pensa sobre a verdade dessas declarações no contexto de nossa crônica, falaremos de forma mais ampla sobre nossa maneira de expressar quantidades. É importante ressaltar que a presente tese foi defendida em 2020, mas toda a pesquisa e produção em 2019.

Em linguagem natural, muitas expressões têm a função de representar quantidades e especificar propriedades, mas nem todas fazem isso de forma clara e muitas o fazem sem referência alguma a números. Nas gramáticas tradicionais do Português Brasileiro (PB) palavras de diferentes classes gramaticais servem como indicadoras de quantidade: advérbios como "muitos", "poucos", "bastante"; pronomes como "algum", "todos", "nenhum"; Artigos como "o", "um"; numerais como "sete", "duplo", "trigésimo", são alguns exemplos. Dada a abrangência atingida por expressões que quantificam poderíamos pensar ser possível uma proposta de agrupar quantificadores em uma classe própria de palavras, no entanto, as formas de quantificar nas linguagens são tão distintas quanto são distintas as posições dos termos quantificadores nas frases que podemos formular. Sintaticamente falando, estamos limitados em nossas linguagens às posições em que nossas palavras podem aparecer nas frases garantindo algum sentido naquela combinação de palavras para os falantes daquela língua. Segundo Chierchia (2003, p. 27) se deve a Greenberg (1963) o primeiro grande estudo classificador de língua pelos seus "tipos" sintáticos. Dentre outros universais linguísticos, Greenberg teria separado diversas línguas pelas formas como ordenam palavras que assumam a posição de sujeitos (S), objeto (O) e verbo (V). O PB, por exemplo, nessa

[1] Raymond M Smullyan (1919 - 2017), foi, dentre tantas outras coisas, um lógico e em seu livro *what is the name of this book? The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzels.* de 1978, dedicou uma seção da primeira parte a charadas lógicas sobre uma ilha onde os moradores ou só mentiam ou só falavam a verdade *THE ISLAND OF KNIGHTS AND KNAVES.* Em 1987 um outro livro de Smullyan, *Forever Undecided: A Puzzle Guide to Godel* traz mais uma vez os problemas da ilha. Existem algumas traduções distintas para os nomes dos moradores da ilha, pois, embora não pareça haver problema com a tradução dos que só falam a verdade, isso é, *knights* como *cavalheiros*, a tradução de *knaves* tem se dividido entre *patifes*, *tratantes* e muitos outros, não traindo a tradição de sempre ser mais difícil o caso para a falsidade. Numa tradução não oficial de João Marcos de Almeida o termo usado é *cavilosos* e é daí que vem o nosso *Cavalhosos.* Temos que admitir que ainda não decidimos se os Cavalhosos falam coisas que não são nem verdade nem mentira ou se o que eles falam é ao mesmo tempo verdade e mentira.

classificação está dentro do grupo mais difundido, aquele da ordem SVO.

Como vimos, os termos que quantificam estão em diversas classes de palavras, assim também podem aparecer em diversas posições em uma frase. Mas isso também é algo que varia de acordo com a estrutura sintática de cada língua. Segundo Peters e Westerst (2006, p. 10) dois grandes grupos separam as categorias sintáticas das quantificações nas línguas, por assim dizer: aquelas que o fazem por meio de afixos, advérbios e auxiliares são do grupo da a-quantificação; os que o fazem por determinantes (DET), por outro lado, são do grupo de d-quantificação. Segundo os mesmos autores, muitas línguas têm quantificações dos dois grupos. O tipo de quantificação que nos interessa nesse trabalho é a d-quantificação e, uma vez que "determinante" não é o tipo de termo gramatical comum, vamos a uma explicação mais detalhada. Bem, a definição mais direta que encontramos foi a de que "os determinantes são expressões que, no português, precedem imediatamente os nomes" (CHIERCHIA, 2003, p. 75). Determinantes em algumas frases seriam então:

<u>Um</u> estudante luta muito.
<u>Todo</u> pai tem o filho que merece.
<u>Ao menos seis</u> corações foram postos no espeto.

Todos os termos sublinhados quantificam[2], estão todos em posição de sujeito nas frases, mas nem todos são uma palavra simples. No último exemplo apenas a palavra "seis" precede imediatamente um nome. Assim vamos ampliar nosso entendimento de "determinante" e "nome" para quando um conjunto de palavras cumpre a função sintática delas com o termo sintagma, assim, "ao menos seis" é um sintagma e entenderemos por sintagma nominal (SN) um conjunto de palavras que juntas ainda cumprem todas as funções de um nome. "Um estudante", "Todo pai" e "Ao menos seis corações" são SN nos nossos exemplos acima. Na composição do SN o determinante, enquanto termo isolado que compõe o sintagma, é o elemento que se encontra mais à esquerda, segundo Guimarães (2006, p. 23)[3]. Não há dúvida de que os determinantes quantificam, mas não é por isso que são passivamente interpretados como quantificadores, especialmente em termos lógicos. Em artigo seminal para o estudo da quantificação na intersecção entre a linguística e a lógica Barwise e Cooper (1981) propuseram que o que nós chamamos de quantificador corresponde ao SN, isso é, todo o conjunto de palavras sobre o qual atua um determinante, e não o determinante em si. Assim a estrutura de uma frase quantificada seria a seguinte:

[2] Não apenas eles, "o" na segunda frase e "no" na terceira também estão quantificando, e os nomes que acompanham poderiam estar na posição de sujeito, mas vamos nos centrar nos destaques.

[3] Mas veremos que muitas vezes teremos que tratar o determinante como expressão.

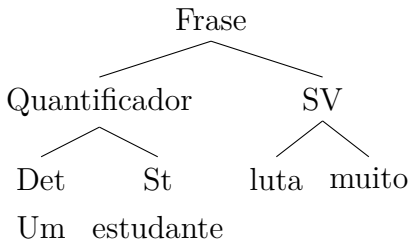


Figura 1 – Árvore de Barwise

Uma vez que um quantificador é qualquer construção possível com um determinante e um nome[4] ($\langle Det, N \rangle$) o próprio quantificador nessa interpretação é um SN e junto com um sintagma verbal (SV) forma uma frase. Mas na definição de Barwise e Cooper (1981) e para a gramática do inglês, um sintagma nominal[5] tem como característica o fato de poder ocupar as funções de sujeito e/ou objeto em frases.

Num âmbito bem mais abrangente do que a perspectiva Inglês/Português, Aristóteles apresenta, nos *Primeiros Analíticos*, as chamadas "Proposições Categóricas", que são um dos recursos linguísticos fundamentais do raciocínio silogístico. Não queremos que pareça uma inversão de linearidade histórica muito gritante, mas a radicalidade da mudança de abordagem, de tratar todo o SN como quantificador, proposta por Barwise e Cooper será melhor percebida se virmos o quadrado aristotélico aqui.

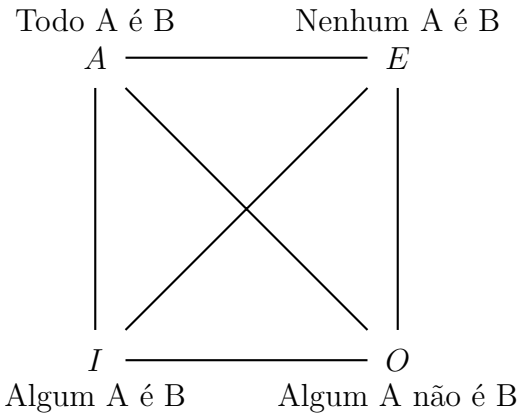


Figura 2 – Quadrado aristotélico das oposições

Observe que os quantificadores “todo”, “nenhum”, “algum” e “Algum não é[6]” são absolutamente independentes (se levarmos em conta o ambiente unitário do SN) do que seriam os *Set terms* das frases onde aparecem, isso é independentes dos nomes que aparecem como sujeitos. A diferença de abordagens se justifica pelo fato de que os autores defendem explicitamente que “existe uma visão equivocada de que o significado de quantificadores deve ser construído dentro da lógica, e consequentemente que esse

[4] Nas palavras de Barwise e Cooper um *set term*, St, em nossa árvore
[5] *noun-phrase*
[6] Por vezes ‘nem todo’.

significado não deve variar de um modelo para outro[7].” (BARWISE; COOPER, 1981, p. 162, tradução nossa). Dito de um modo menos técnico, os autores defendem que a forma aristotélica, inicialmente adequada a todo A e B arbitrários pode até ser boa para a definição do que é um “quantificador lógico”, mas não do que é um “quantificador”, de forma geral[8]. Para os autores o sentido de um quantificador pode sim variar de um modelo para outro. Ainda assim, o fato de tentar uma definição formal mostra que eles não desejam uma variação tão descontrolada que nem mesmo o sentido dos termos se possa deter.

Na maioria dos casos, o falante simplesmente ignora por completo qualquer questão profunda sobre o significado de um quantificador e o usa de acordo com a relevância que ela tenha no contexto em que sua proposição é proferida. Acontece que, considerando a hipótese, não tão absurda, em que esse significado precise ser ensinado, temos alguns problemas. Como experimento de pensamento, considere o caso em que um novo falante do português[9] – digamos João da Silva, JS – não saiba se a expressão quantificadora “nem todo” se aplica à proposição que será enunciada. Existe uma definição precisa capaz de sanar sua dúvida.

(i) Dizemos “Nem todo A é B” se e somente se “pelo menos 1 (um) elemento de A não é elemento de B”.

Por outro lado, caso o problema de JS fosse com uma frase que fizesse uso do termo “maioria”, além do significado das palavras lógicas, que pressupomos já serem de conhecimento de JS, seria necessário que JS tivesse conhecimento do que significa “metade”, uma quantidade precisa, mas não passível de formalização na lógica de primeira-ordem (BARWISE; COOPER, 1981, p. 161). Explicar a JS o que significa “maioria” com o uso do conceito de “metade” em português seria algo do tipo:

(ii) Dizemos “A Maioria dos As são Bs” se e somente se “Pelo menos metade mais 1 (um) dos As, ou mais, são Bs”.

Analogamente, seria possível definir “minoria” e ainda se poderia definir “maioria simples” e “maioria qualificada” de modo preciso fazendo uso, além da lógica, da noção de “metade”. Os problemas começam a aparecer se JS não entende quantidades como “grande parte”, “pequena parte”, “uma parte”, “muitos” e “poucos”. Essas noções não são tratadas

[7] *there is a mistaken notion that the meaning of the quantifiers must be built into the logic, and hence that it cannot vary from one model to another*

[8] De fato isso pode ser alegado para todo sistema lógico e não só para a lógica aristotélica, no caso específico falamos apenas a observação dos autores.

[9] É claro que essa hipótese não tão absurda se torna esdrúxula no exemplo porque desconsidera-se todas as demais formas de ensinar ou aprender uma linguagem, mas o que queremos aqui é um emblema apenas.

na lógica clássica, e são frequentemente tidas como completamente imprecisas. De fato, dentro da perspectiva em que estamos definindo quantificadores, traçar uma definição para esses casos parece realmente complicado. Para ilustrar essa complicação tentemos algumas definições para o caso fictício de JS:

(iii)

a) Dizemos que "grande parte dos As são Bs" se e somente se "Muitos As são Bs".

b) Dizemos que "pequena parte dos As são Bs" se e somente se "poucos As são Bs".

c) Dizemos que "parte dos As são Bs" se e somente se "poucos As são Bs".

Aqui nem sequer consideramos os casos onde os quantificadores aparentemente precisos tratados em (i) e (ii) fossem usados nas definições dos imprecisos, uma vez que essas tentativas seriam trivialmente erradas (como exemplo, observemos que não podemos definir "muitos" por "todos" e menos ainda "nenhum" por "poucos"). Tais tentativas além de equivocadas nos dariam os mesmos quantificadores previamente existentes. Para considerar os problemas em (a) e (b) diremos que A instancia o conjunto dos "servidores" da instituição em nossa alegoria de abertura e que B instancia o conjunto dos servidores que "furaram a greve". Abaixo vemos três casos que demonstram a fraqueza dessas definições (a), (b) e (c) de (iii).

(a-1) Muitos servidores furaram a greve.

(a-2) Grande parte dos servidores furou a greve.

O argumento do chefe de que 250 (5% em 5.000) são (a-1) "muitos servidores" pode ter convencido. Não é absurdo que as pessoas na sala considerem esse número uma quantidade significativa particularmente, levando em conta o argumento de que são mais servidores do que o número de pessoas na sala (ou mesmo que caberiam na sala). Por outro lado, dificilmente o chefe conseguiria convencer o público de que "grande parte dos servidores furou a greve", nesse caso para medir "grande parte" dos 5.000, a medida da sala não seria a melhor. Se aumentarmos os conjuntos participantes desse exemplo podemos observar de maneira mais evidente a disfunção entre "muitos" e "grande parte". Pense que as declarações fossem "muitas mulheres são albinas" e "grande parte das mulheres são albinas". Ora, enquanto parece óbvio que para uma população de quase 100.000.000 (hoje provavelmente mais do que cem milhões) de mulheres (IBGE, 2010) o número de "mulheres albinas" deve ser alto, o que torna a primeira verdadeira, mas nem mesmo o formulário do Censo do IBGE leva em consideração os albinos (em geral), o que faz se tornar provavelmente falsa, a segunda sentença, e imaginarmos que a verdade é que

"pequena parte das mulheres do Brasil são albinas". Vamos então pensar (b) a partir desse exemplo.

(b-1) Pequena parte das mulheres do Brasil são albinas.

(b-2) Poucas mulheres do Brasil são albinas.

Mais uma vez parece que essa bem "pequena parte" não necessariamente corresponde a "poucas" mulheres. Basta relembrar a proporção de mulheres brasileiras. Com o nosso exemplo inicial, podemos estar dispostos a admitir que uma "Pequena parte dos servidores furou a greve" e não aceitarmos que a quantidade de 250 corresponda a "poucos servidores". Para o último caso, voltemos ao nosso exemplo inicial na interpretação com A para "servidores" e B para "entraram greve".

(c-1) Parte dos servidores entrou em greve.

(c-2) Poucos servidores entraram em greve .

Mais uma vez temos problemas na definição. A especificação de "parte" parece tão vaga que deturpou a realidade no caso da fala do sindicalista ("Parte dos servidores está em greve", quando só ele estava), e também não nos ajuda aqui. A especificação de "parte" pode mesmo servir para a "maior parte", como é o caso em nosso contexto, ou mesmo, mas em um contexto completamente diferente, pode se referir a "todos" e, definitivamente, não necessariamente "poucos".

Mas o que pode provocar tantos problemas no país dos Cavalhosos? A incerteza de resposta sobre a verdade ou falsidade das declarações do chefe e do sindicalista podem ser elucidadas em mais um apelo a Aristóteles. Nos *Tópicos*, Aristóteles assevera que "Quando demonstrarmos que um atributo pertence a todo os objectos de um género, teremos demonstrado que pertence a alguns" (KNEALE, 1968, p. 38). O que tal afirmação expressa é que sempre que afirmamos "Todo A é B" estamos nos comprometendo com a verdade da proposição "Algum A é B", e que[10] sempre que afirmamos "Nenhum A é B" estamos também evidenciando que "Nem todo A é B". Para Kneale (1968, p. 38) essa declaração antecipa o que mais tarde seria conhecido como relação de "subalternação" [11], uma relação que existe entre A e I (e mais precisamente de A para I, mas não o contrário) e de E para O (mas não de O para E). Não se deve cair, no entanto, na falsa impressão de

[10] Uma vez que "nenhum A é B" é o mesmo que "Todo A não é B" e "nem todo A é B" é o mesmo que "Algum A não é B".

[11] Veremos ao longo da tese que essa sugestão de Aristóteles por mais natural que pareça é foco de uma grande controvérsia de interpretação dos quantificadores, pois essa relação acontece em decorrência do fato de que nenhum predicado pode ter extensão vazia para Aristóteles. Aqui pulamos uma problematização sobre a *importação existencial* com o objetivo de dar mais fluidez ao texto.

que expressar "Todos" já é o mesmo que expressar "Algum" ou que expressar "Nenhum" é o suficiente quando se quer dizer "Nem todo". Em mais um corte histórico, se voltarmos aos nossos quantificadores ou determinantes, vemos que o que lhes "falta" em precisão, em relação ao quantificadores aristotélicos, lhes "sobra" em subalternação. Quero dizer com isso:

- O sindicalista se valeu do fato de que dizer "um" é também dizer "uma parte" para asseverar "uma parte dos servidores está em greve" no lugar de "um servidor está em greve".
- O chefe se valeu do fato de que dizer "quase todos" é também dizer "alguns que não são todos" para dizer que "alguns e não todos os servidores aderiram a greve" no lugar de dizer que "quase todos (a maioria ou muitos) servidores aderiram à greve".

Como nos casos que envolvem a relação de subalternação do quadrado das oposições, a afirmação de alguns desses quantificadores ou determinantes em proposições do português implica a afirmação de outros. Mas do mesmo modo que dizer "todo" não é o mesmo que dizer "algum", dizer "parte" não é o mesmo que dizer "um". Essas "escalas" funcionam em um sentido apenas mas, o que se espera de quem fala, obviamente, é que essa pessoa diga algo que importe para a comunicação. Imagine que se alguém é premiado como, digamos, o melhor chefe de uma instituição, apresentá-lo como alguém que "figurou entre os 100 melhores',' ainda que seja verdadeiro, pode soar como uma forma de diminuir a importância de seu prêmio. Tomando essa acepção somos levados a um pressuposto de relevância onde:

(**Todos** *diz* **Alguns** *e além disso* **Alguns** *diz* **Não todos**)

Isso não tem procedência na lógica aristotélica, e menos ainda na "moderna lógica clássica" de primeira ordem, para a qual nem mesmo a relação de subordinação vale. Se uma articulação escalar pode ser feita para os quantificadores e/ou determinantes das línguas naturais, então temos um caminho para ajudar nas definições desses termos quantificadores. O lado esquerdo dessas definições não trai a relação de subordinação, já o direito reflete a ideia de relevância e respeito a postulados griceanos[12]. Articula-se aí a ideia de que se alguém usa a expressão "alguns" está comprometido com essa proporção específica e: ou não tem conhecimento, ou não quer que o interlocutor tenha, de que a expressão "todos" poderia ser usada. O mesmo pode-se dizer do uso de "alguns e não todos" em detrimento de "quase todos" na fala do chefe. Não falamos nem mesmo de todas as formas de quantificar usadas em nossa alegoria, mas vejamos como elas poderiam se articular em ordem de, digamos, relevância. O mapa abaixo é a reunião de algumas

[12] *Ver* Grice et al. (1975)

escalas[13] possíveis separadas e independentes, uma em cada linha, todas podem funcionar, mas não estamos propondo nenhuma delas como correta.

Todos » quase todos » a maioria » grande parte » pequena parte » alguns
Todos » a maioria
Todos » grande parte
Todos » alguns
Quase todos » grande parte
Quase todos » parte
Quase todos » alguns
A maioria » parte
A maioria » alguns
Pequena parte » parte
Muitos » alguns
Poucos » alguns
Um » parte

O mapa acima evidencia uma das dificuldades que se apresentam ao tentarmos dar uma definição minimamente satisfatória para a compreensão das declarações de nosso falante fictício JS para o caso dos quantificadores descritos em (iii) e alguns outros. Mas bem mais importante do que isso é o fato de vermos que essa imprecisão pode gerar confusões em nosso uso corriqueiro do português. As informações dadas pelo chefe e o sindicalista no caso do "alguns" e "parte", grosso modo, são menos relevantes do que deveriam ser. No entanto, observe nas escalas acima que, dado que excluímos provisoriamente "nenhum" de nossa lista, "alguns[14]" é o único quantificador que aparece ou poderia aparecer na ponta mais à direita de qualquer escala. "Muitos", por outro lado, não tem uma boa posição a não ser ao lado esquerdo de "alguns". Veja por exemplo que todas as escalas abaixo podem ser boas, a depender de um contexto.

Todos » muitos » a maioria » grande parte » pequena parte » alguns
Todos » a maioria » muitos » grande parte » pequena parte » alguns
Todos » a maioria » grande parte » muitos » pequena parte » alguns
Todos » a maioria » grande parte » pequena parte » muitos » alguns

Não apresentaremos todos esses contextos, mas o mais problemático parece ser aquele onde mesmo "pequena parte" pode representar uma quantidade grande o suficiente para ser grande e esse já exemplificamos no caso das mulheres albinas.

[13] Para entender melhor podemos dizer que para um quantificador Q qualquer, estar à esquerda do símbolo '»' que tem um quantificador Q' à direita, quer dizer que dizer: "Q diz Q' mas Q' não diz Q".
[14] Poderia sem qualquer prejuízo ser "algum".

Queremos, com tudo o que dissemos até aqui, evidenciar que os quantificadores têm diferenças profundas e que essas diferenças criam sérios limites nas formas de definir que foram usadas aqui. A presquisa que apresentaremos nesta tese visou a classificação de quantificadores a partir de uma perspectiva do "uso da língua" e não teve como objetivo qualquer "estabelecimento de norma". Acreditamos ser possível separar ao menos três classes de quantificadores quanto às propriedades que pretendemos apresentar[15]: os precisos, que incluem os que podem ser logicamente formalizados, e/ou definíveis nos termos da teoria dos conjuntos, como a "maioria" e a "minoria"; os quasi-precisos, um novo grupo que pretendemos demonstrar que é passível de descrição mínima que inclui "pequena parte", "grande parte", "quase todos" entre outros; e os imprecisos para os quais pretendemos apresentar uma argumentação de que não há a possibilidade de qualquer descrição de uso por serem ainda mais dependentes de contexto do que os quasi-precisos, e que inclui "muitos" e "poucos". Supomos ainda, embora isso demande um cuidadoso trabalho realizado somente de forma inicial no capítulo 4, que uma categorização adequada do que chamamos aqui de quantificadores quasi-precisos pode ser profícua na criação de uma teoria formal que trate problemas com o uso de termos não tratáveis em primeira-ordem ou de uma nova linguagem ampliada.

Para fazer isso, distribuímos nosso trabalho da seguinte maneira. No capítulo 1, a primeira seção é dedicada à percepção de "interpretação" e segue a análise de Michael Dummett sobre teoria do significado na tentativa de esclarecer que o processo de interpretação pode ser cheio de nuances complicadas. A seção 1.2 começa a tratar o processo de interpretação das constantes lógicas, entrando pela primeira vez no tópico dos quantificadores, de interesse dessa tese. Em 1.3 os quantificadores são tratados ainda mais de perto, ou poderíamos até dizer internamente, com uma análise de suas propriedades. Nesse momento do debate a ideia, já mencionada de quantificador generalizado, vai nos ajudar a tratar o caso do quantificador Q^{Ma}, que pretende formalizar a noção de maioria. Em 1.4 tentaremos a abordagem inversa, analisando os quantificadores dentro de uma linguagem e o comportamento dessas linguagens ou as propriedades das linguagens em que os quantificadores se fazem presentes.

No segundo capítulo em 2.1 apresentamos um debate sobre uma primeira tentativa de formalização, uma das quais parece mais óbvia, mas que apresenta sérios problemas. Em seguida uma sequência de propostas alternativas de representações de quantificadores. Em 2.2.1 apresentaremos questões relativas às primeiras propostas de formalização de quantificadores para a linguagem natural com comentários sobre as limitações desta

[15] E preciso notar duas coisas com respeito a essa intuição e seus desdobramentos. Primeiro, que não se trata de uma classificação de palavras ou expressões de uma língua. Embora seja feita dentro de um idioma, a ideia é argumentar em favor de que os termos usados como quantificadores possuem "status" semânticos distintos em seus usos comuns. Segundo, observando tal classificação é possível que se revelem modos de usos distintos desses quantificadores, percebidos em casos em que os mesmos quantificadores, em contextos distintos, sejam por exemplo, precisos e quasi-precisos.

proposta. Em 2.2.2 apresentamos uma proposta de uso de ultrafiltros na formalização do quantificador *aa* (almost all), realizando o mínimo do percurso histórico como o trabalho de 1975 de Shelah e uma nova versão discutida por Kulman em 1989, em seguida apresentaremos o trabalho independente de Veloso e Carnielli, para fins do processo de raciocínio sobre incerteza que formaliza o quantificador *Almost all*. Em 2.2.2.1 falaremos de uma escola brasileira que se forma posteriormente aos trabalhos de Veloso e Carnielli, mas embasada nos trabalhos de Grácio (1999) que se propõe à implementação de uma série de quantificadores não lógicos dentre os quais o quantificador para "muitos".

Ao discutir as limitações e vantagens das abordagens de formalização de quantificadores, nos restringiremos por fim à tentativa de Grácio e faremos no capítulo 3 a exposição de como a pragmática foi capaz de tratar dos (ou de ao menos alguns dos) problemas de imprecisão apresentados aqui. Faremos uma revisão de literatura passando por Grice para apresentar as escalas de Horn e debater um pouco sobre implicaturas generalizadas. Finalizaremos uma breve exposição da forma como juntamos as contribuições da pragmática em nossa proposta e do debate na atualidade baseados no trabalho de Potts 2014.

Nosso quarto e último capítulo inicia por delimitar o tipo específico de expressões quantificadoras a que nos estamos referindo, a essa altura simplesmente para evitar ambiguidades. Em seguida detalharemos nossa proposta de separação dos quantificadores e apresentaremos as propriedades que nossa classificação evidencia em tais quantificadores. Por fim, fechamos os detalhes de nossa classificação e propomos, para aqueles que achamos ainda ser possível, uma abordagem contexto independente e uma ideia para a definição de verdade desses quantificadores.

1 Barreiras para a definição e formalização de Termos Quantificadores

1.1 Uma reflexão sobre o processo para a interpretação

Operadores lógicos podem, ou não, representar propostas de tradução de termos da linguagem natural em termos de uma linguagem artificial apropriados a um determinado sistema de lógica. Para tanto não podemos simplesmente apontar que um símbolo, ou letra esquemática, é a tradução de tal ou tal expressão de uma língua natural sem antes explicar que tipo de coisa queremos dizer com as fórmulas em que o novo símbolo a ser introduzido pode ser utilizado. O que queremos dizer com o novo elemento introduzido na linguagem é algo distinto do mero esclarecimento do seu significado em português, por exemplo. É o que chamamos de interpretação semântica. Uma investigação sobre limites existentes na interpretação semântica de expressões quantificadoras na linguagem não pode prescindir de algum debate sobre interpretação. Aqui recorremos a Michael Dummett em sua obra de 1991 *The Logical basis of metaphysics* e sua teoria do significado[1] como uma forma de conseguir certos esclarecimentos sobre as relações entre lógica, interpretação e semântica de línguas naturais e artificiais.

Dummett entende lógica e teoria do significado como duas perspectivas distintas sobre o mesmo objeto e entende que o alinhamento entre o conteúdo dos dois ramos se dá pela origem em um tronco comum, que seriam os trabalhos de Frege, de onde se originam as perspectivas contemporâneas das duas áreas, ainda que não tenham os mesmos objetivos. Haveria duas diferenças entre as áreas, contudo. Primeiro, lógica, como avaliação de formas de argumentos, é concernente à noção de verdade em função de

[1] theory of meaning

uma dada interpretação estando atenta a uma multiplicidade de interpretações possíveis. Entenda-se aqui "verdade em função de..." como uma questão sobre as condições que nos levam a asserir a verdade. Uma teoria do significado, a qual está interessada em uma interpretação única da linguagem, a correta (ou supostamente correta); E segundo, lógica tem um interesse central em inferências e por isso não problematiza a noção de verdade apenas a assume como pressuposta. Isso é, o ponto fundamental da lógica é apenas se a verdade das premissas[2] obriga a verdade da conclusão. No entanto, as noções de verdade e significado parecem estar amplamente conectadas e em uma teoria do significado parece requerer a explicação de como essa conexão acontece (DUMMETT, 1991, p. 20). Dummett aponta que questões sobre a possibilidade (ou não) de existirem condições para definir a verdade ou falsidade de frases com termos sem referente[3] ou juízos de valor[4] são questões sobre o significado de tais asserções mais do que uma investigação sobre a aplicação dos predicados "verdadeiro" e "falso". O autor prossegue argumentando que isso não é o mesmo que afirmar que "as condições de verdade de uma sentença determinam seu significado" e que essa fórmula nos diz muito mais sobre o que o defensor de tal ideia concebe como "significado" do que outra coisa. Uma das explicações mais diretas sobre a "tarefa" da teoria do significado dada por ele é que essa tarefa seria "explicar o que, em geral, é afetado pela enunciação de uma sentença na presença de ouvintes que conhecem a linguagem à qual ela pertence."(DUMMETT, 1991, p. 21, tradução nossa.). [5]

Por mais explícitas que possam ser as distinções apresentadas estamos aqui interessados nas noções semânticas partilhadas entre lógica e teoria do significado e isso nos permite continuar em linha com a análise feita em *The Logical basis of metaphysics*. Ainda que possa parecer muito grosseiro para uma avaliação mais cuidadosa sobre os domínios de estudo da lógica, é possível dizer que o campo de estudo que se detém, na tradição contemporânea, ao estudo dos aspectos semânticos da lógica é a área conhecida como "teoria dos modelos". Por isso, Dummett leva em conta especificamente as relações entre teoria dos modelos e teoria do significado. Mas, como é de se esperar, vai além – ou talvez seja melhor dizer "aquém" – procurando por "traços de significado" previamente ao estabelecimento do que é lógica, e consequentemente fora da teoria dos modelos. Os trabalhos de Dummett estão, na verdade, no contexto de criação de uma área rival à teoria dos modelos como estudo semântico, as *proof-theoretic semantics*.

Dummett percebe um caráter semântico em um aspecto externo, e mesmo anterior, às definições apresentadas no escopo da teoria dos modelos que ele chama de "genuinamente semânticas" (DUMMETT, 1991, p. 23). Essa percepção de Dummett vem do seguinte

[2] Independentemente do significado das sentenças mais básicas e o critério que defina a verdade delas.
[3] Como "O atual rei da França é calvo"
[4] Asserções que são objeto de estudo da Éticas, como "É inescrupuloso minimizar o contingenciamento da educação".
[5] *to explain what, in general, is effected by the utterance of a sentence in the presence of hearers who know the language to which it belongs.*

raciocínio: posto que só existe lógica a partir da "introdução de uma representação esquemática de uma forma de argumento" onde "um argumento particular é válido somente se é instância de uma forma válida" (DUMMETT, 1991, p. 23), o autor dá o veredito: "é um erro supor que, antes de uma noção genuinamente semântica ser introduzida, somente uma caracterização da teoria da prova de inferências válidas é possível"(DUMMETT, 1991, p. 23, tradução nossa) [6]. Contra "dividir por dois, sem resto" os elementos atuantes na construção de uma lógica naqueles da teoria dos modelos (semânticos), por um lado, e os da teoria da demonstração ou prova (sintáticos), por outro, ele afirma que o próprio uso de letras esquemáticas só é possível mediante uma interpretação particular sobre essas letras e ainda mais particularmente "...sobre esta em questão de uma sentença como sendo uma instância de uma fórmula."(DUMMETT, 1991, p. 23, tradução nossa).[7] De foma muito genérica, é possível que Dummett estivesse discutindo aí que antes da questão sobre se há validade na forma tomada como lógica, existe a questão sobre qual é a forma lógica e porque escolhemos uma em detrimento de outra. A essa interpretação prévia, definida pela forma como se opta por substituir letras esquemáticas por certas expressões específicas, Dummett chama de noção "pressemântica" de interpretação ou interpretação por substituição. Tal noção é central na definição de um argumento com forma válida, que ele caracteriza, como aquele que tem sua conclusão verdadeira sobre todas as interpretações sobre as quais suas premissas são verdadeiras. A principal diferença entre as duas noções de interpretação é que a noção pressemântica não envolve uma análise de como as sentenças são determinadas como verdadeiras ou não (Dummett se refere aqui ao modo composicional de fazer isso) e simplesmente se apoia na nossa capacidade de reconhecer se tais sentenças são verdadeiras ou não. Por isso a noção pressemântica não é suficiente para uma teoria semântica.

O autor prossegue explicando que uma teoria semântica "...requer que estruturemos, para cada categoria de expressão, uma concepção do tipo de valor semântico que uma expressão dessa categoria possui." (DUMMETT, 1991, p. 24, tradução nossa)[8]. Antes mesmo de uma "noção programática" do que seria valor semântico, Dummett diz que "O valor semântico de uma expressão é a característica de tal expressão que vai determinar a verdade de qualquer sentença em que ela ocorra."[9] (DUMMETT, 1991, p. 24, tradução nossa). Tal determinação recorre à estrutura interna da sentença e assim a noção semântica de interpretação ignora as expressões que podem substituir letras esquemáticas atribuindo diretamente a essas letras valores semânticos que "podem ser possuídos por expressões que as representam"[10](DUMMETT, 1991, p. 24). À junção destas ideias parece ser imediato o

[6] *It is a mistake to suppose that, before any genuinely semantic notions have been introduced, only a proof-theoretic characterisation of valid inferences is possible*

[7] *upon that of an actual sentence's being an instance of a formula.*

[8] *requires that we should frame, for each category of expression, a conception of the kind of semantic value that an expression of that category possesses.*

[9] *The semantic value of an expression is that feature of it that goes to determine the truth of any sentence in which it occurs*

[10] Pense que em uma lógica proposicional variáveis sentenciais 'p' e 'q' são letras esquemáticas para

fato de que o que se deseja em uma tradução, digamos, adequada de uma expressão, ou de uma sentença, de linguagem natural pra uma lógica é que o valor semântico atribuído aos termos em lógica não só "possam" (tal como se vê na citação acima) como "devam" ser possuídos por expressões que as "letras esquemáticas" substituem, para usar um termo de Dummett. Também é imediato que, para que se possa atribuir tal valor semântico às fórmulas, é preciso que se consiga reconhecer, em certa medida, o valor semântico de tais expressões da linguagem natural. Queremos dizer com isso o seguinte: nos parece que a percepção de uma forma como uma "forma lógica", além de nos fornecer o reconhecimento de uma determinada classe de expressões, nos fala algo sobre o modo como percebemos essa expressão como verdadeira ou não, mesmo que de maneira imprecisa e implícita. Aqui vamos nos repetir na citação para deixar claro que essa não é a visão de Dummett, pois em sua visão na noção pressemântica de interpretação, esta por substituição, "simplesmente confiamos em nossa capacidade de reconhecer certas sentenças particulares, obtidas por substituição de determinadas fórmulas, como verdadeiras ou falsas" (DUMMETT, 1991, p. 24, tradução nossa).[11]

Por tudo isso podemos dizer que a interpretação semântica não é uma mera associação de uma fórmula a uma expressão por meio de uma atribuição direta de símbolos a palavras[12] do tipo 'sempre que digo $A \wedge B$ quero dizer "João é menino e Maria é menina"' com a simples colocação de que tenho assim estruturas internas equivalentes onde o símbolo $\wedge$ substituiria conjunções aditivas e adversativas de minha linguagem natural. A necessidade de observar a estrutura interna das sentenças é o que revela a importância da sintaxe no processo.

> O fornecimento de uma teoria semântica viável depende em grande parte da adoção prévia de uma sintaxe adequada. Ama vez que uma teoria semântica tem que explicar como uma sentença é determinada como verdadeira, ou não, de acordo com sua composição, e uma vez que, da mesma forma que expor as regras de formação que governam a linguagem natural, a composição de uma sentença não deve ser vista como aparente a partir de uma inspeção superficial, é claro que, para obter uma teoria semântica bem-sucedida, precisamos primeiro de uma análise adequada da maneira como consideramos que as sentenças devem ser construídas a partir de seus componentes.[13] (DUMMETT, 1991, p. 25, tradução nossa)

declarações muito distintas como "GOT teve um fim decepcionante" e "$\sqrt{2}.\sqrt{8} = 4$" e os valores semânticos das variáveis sentenciais são seus valores de verdade. As sentenças têm "estrutura sintática" e "categoria sintática" distintas. O valor semântico de uma constante é o seu referente, (no caso de 8 é o número nomeado por '8'), o valor semântico de um predicado é sua extensão, de uma relação binária a extensão de um conjunto de pares ordenados e assim por diante. O tipo do valor semântico aplicável é reconhecível pela função sintática. O significado de uma frase, a declaração na linguagem traduzida (português, matemática etc), por outro lado, não é precisamente o valor semântico das expressões pelas quais elas são substituídas.

[11] *we simply rely on our ability to recognise certain particular sentences, obtained by replacement from given formulas, as true or as false.*

[12] Aqui como exemplo centrado na linguagem natural.

[13] *The provision of a workable semantic theory depends to a very large extent upon the prior adoption of a suitable syntax: since the semantic theory has to explain how a sentence is determined as true or*

E ainda sobre a relevância da análise sintática.

> A relevância de uma análise sintática prévia é tão grande que devemos questionar se ela não o suficiente, ao menos para uma linguagem com uma lógica clássica. Uma vez que nós temos uma sintática fregeana, os detalhes de uma semântica clássica não estariam previamente determinados? Existe algo além para fazer, fora proceder de modo óbvio? Não parece que isso seja o caso, de fato, para teorias semânticas não-clássicas, posto que as explicações de suas constantes lógicas não recebem uma forma direta. Classicamente, por exemplo, nós podemos estipular que 'se A' então B' é verdadeiro apenas no caso em que: se A é verdadeiro, então B é verdadeiro; isso pode ser chamado de estipulação absolutamente direta.[14] (DUMMETT, 1991, p. 25, tradução nossa)

A problemática que vai ser desenrolada nesse ponto por Dummett fica clara e é precisamente se: em lógica clássica, graças ao que Dummett chama de *straightforward stipulation*, a sintaxe[15] já seria o suficiente para determinar a semântica. É fácil notar que esta "estipulação direta" não nos dá pistas sobre o valor semântico da expressão ou sentença na linguagem natural uma vez que só transporta o termo, no caso "then" da sentença para a semântica. A resposta de Dummett para o questionamento levantado é que "... dada uma sintaxe fregeana, praticamente apenas uma coisa é requerida para determinar a forma geral de uma teoria semântica: a saber, especificar o que, em geral, constituir o valor semântico de uma sentença[16]." (DUMMETT, 1991, p.30, tradução nossa)

Até esse ponto, o suporte oferecido por Dummett para o nosso trabalho consiste de três ideias que precisam ser isoladas:

(a) A interpretação por substituição de uma expressão tem caráter semântico anterior à atribuição do seu valor semântico no processo de construção de uma noção "*genuinamente semântica*".

O processo de definição de uma "forma"(especificamente de uma forma lógica) é um processo de percepção ou separação dela que pressupõe um reconhecimento de características intrínsecas desta forma. O caráter semântico deste processo de interpretação grosseiramente falando, então, está no fato de que para transportar o sentido de

otherwise in accordance with its composition, and since, even to state the formation rules governing natural language, the composition of a sentence is not to be thought of as apparent from a superficial inspection, it is plain that to obtain a successful semantic theory we need first an adequate analysis of the way sentences are to be regarded as constructed out of their component parts.

[14] *The importance of the prior syntactic analysis is so great that we must ask whether it is not everything, at least for a language with a classical logic. Once we have a Fregean syntax, are not the details of classical semantics already thereby determined? Is there anything left to do, save to proceed in the obvious way? This does not appear to be the case, indeed, for non-classical semantic theories, since in these the explanations of the logical constants do not take a straightforward form. Classically, for example, we may stipulate that 'if A, then B' is to be true just in case, if A is true, then B is true; this can be called an absolutely straightforward stipulation.*

[15] nesse caso fregeana

[16] *...given a Fregean syntax, virtually only one thing is required in order to determine the general form of a semantic theory: namely, to specify what, in general, is to constitute the semantic value of a sentence.*

uma expressão para outra é pressuposto que esse sentido seja conhecido, passível de ser conhecido e especialmente que exista. Quando Dummett diz "... é o objetivo de toda teoria semântica primeiramente desenhar uma noção geral adequada de uma interpretação e assim chegar a uma especificação de quando uma fórmula é verdadeira sobre tal interpretação." [17](DUMMETT, 1991, p. 32, tradução nossa), nós estamos interessados em verificar o que seria "uma noção geral adequada de uma interpretação".

(b) O valor semântico de uma expressão é, lato sensu, aquela característica de uma expressão que determina sua verdade (e não simplesmente seu valor de verdade).

Todas as tautologias, por um lado, e contradições, por outro, possuem os mesmos valores de verdade. Não é viável pensar, no entanto, que significam exatamente o mesmo. É tentador pensar todas as igualdades em termos de equivalência, mas talvez não seja possível conhecer "todas as circunstâncias que tornam" uma expressão em português verdadeiras, do mesmo modo que é possível conhecer todas as valorações ou todos os modelos que tornam verdadeiras (os) uma fórmula. Condições de verdade e a maneira como se conhece as condições de verdade de uma expressão ou sentença são coisas radicalmente distintas. Os exemplos devem dar alguma ideia de que o valor semântico de uma expressão é prévio e separado do valor de verdade das sentenças.

(c) Uma estipulação direta não é capaz de apresentar o valor semântico de uma expressão.

Dummett separa as condições em que sabemos se uma sentença é verdadeira ou falsa (seu conteúdo assertórico) das condições em que sabemos do papel dessa sentença na definição da verdade ou falsidade de outras das quais ela é parte (o seu ingrediente do sentido) (DUMMETT, 1991, p. 48). Esta separação vem do fato de que o conteúdo de uma asserção se concretiza nas condições para que essa asserção seja correta.

Aqui realizaremos um pequeno corte temático. Nosso objetivo principal na seção é fornecer ao leitor uma abordagem de interpretação que vai além da ideia de "função interpretação" e atribuição. Ainda que sem a problematização completa, gostaríamos que estivessem expostos alguns atores participantes do processo interpretativo.

1.2 Definições e tipos.

Em uma lógica de primeira ordem o significado de um operador lógico, via de regra, é apresentado na forma de um conjunto (no caso de quantificadores) ou uma matriz (no caso dos operadores proposicionais) que apresenta suas condições de verdade. Por exemplo $\forall$ e $\exists$ são comumente definidos da seguinte forma:

[17] *... it is the goal of every semantic theory first to frame a suitable general notion of an interpretation and then to arrive at a specification of when a formula is true under such an interpretation.*

$\forall x\phi\,(x)$ é verdadeira se para todo x, $\phi(x)$ é verdadeira (independente da definição de verdade e da interpretação de $\phi(x)$) e de forma mais precisa, em todo caso em que eu substituo x por uma constante 'c' a fórmula $\phi\,(c)$ seja verdadeira. Isso é, $\forall x\phi\,(x)$ representa o conjunto I dos "c"s quando $I = DOM$ (I é o próprio domínio).

e;

$\exists x\phi\,(x)$ é verdadeira se para algum x, $\phi(x)$ é verdadeira, ou melhor, se pelo menos uma das constantes 'c' que for substituída tornar a fórmula $\phi\,(c)$ verdadeira. Isso é, $\exists x\phi\,(x)$ representa o conjunto I dos "c"s quando $I \neq \emptyset$ (I é um conjunto diferente do vazio).

O processo de interpretação normalmente é de que uma fórmula com uma variável livre denota um conjunto, a saber, o conjunto dos indivíduos do domínio cujos valores de tais variáveis em substituição a essa variável tornam a fórmula verdadeira no modelo em questão. Nesse contexto os quantificadores são interpretados como propriedades de conjuntos que são subconjuntos do domínio. A percepção imediata que se tem é de que um quantificador apenas seleciona um subconjunto do domínio DOM, no caso de $\forall$ o próprio domínio e no caso de $\exists$ um conjunto diferente do vazio. Posto esse entendimento, propriedades representadas como subconjuntos de um domínio que não dependam de nenhuma outra característica dos modelos podem ser representadas como definindo novos quantificadores[18]

$(Q^i)DOM = \{A \subseteq DOM : A \text{ é } infinito\}$

$(Q^{par})DOM = \{A \subseteq DOM : |A| \text{ é } par\}$ [19]

$(Q^R)DOM = \left\{A \subseteq DOM : |A| > \frac{1}{2}\,|DOM|\right\}$ [20]

Aqui 'Q' é apresentado como uma espécie de quantificador genérico (Generalizado), que é semanticamente apresentado para Domínios, não vazios, arbitrários (DOM) da seguinte forma:

Para um conjunto $\mathbf{Q}^{DOM}$ de subconjuntos de DOM, e um modelo $\mathbf{M} = \langle DOM, I\rangle$, interpretamos as fórmulas do tipo $Qx\phi(x)$ (cuja extensão da fórmula aberta no escopo do quantificador é representada por $\phi(x)^{\mathbf{M},x}$) pela inclusão da seguinte cláusula a uma semântica de primeira ordem:

$$(i)\ \ \mathbf{M} \models Qx\phi(x)\ sse\ \phi(x)^{\mathbf{M},x} \in \mathbf{Q}^{DOM}$$

A proposta de quantificação representada nessa cláusula semântica é para um quantificador que tem como argumento fórmulas abertas com apenas uma variável. (i)

[18] A notação usada aqui segue quase completamente o padrão adotado por (PETERS; WESTERST, 2006), (SZYMANIK, 2016) para quantificadores generalizados.

[19] As barras, como é comum, representam cardinalidade. Aqui temos um exemplo de estipulação direta.

[20] Ou mais recentemente $\{A \subseteq DOM : |A| > |DOM - A|\}$

é somente a forma de cada um dos quantificadores apresentados acima e não diz absolutamente nada sobre o quantificador até que se defina o conjunto $\mathbf{Q}^{DOM}$. Assim, na interpretação de Q^i, $\mathbf{Q}^{DOM}$ é o conjunto de subconjuntos infinitos do domínio, em (Q^{par}) o conjunto dos subconjuntos pares do domínio e assim por diante. Como um primeiro passo para a generalização podemos notar que não importa quantas instâncias de uma mesma variável apareçam em uma fórmula, sempre que temos uma só variável ligada[21] ao quantificador temos o mesmo tipo semântico e no caso em questão o tipo $\langle 1 \rangle$. Abaixo exemplos de sentenças com quantificador deste tipo.

$(i.a)$.

$$\forall x \phi(x)$$

$$Qx(\phi(x) \rightarrow \psi(x, a))$$

$$\exists y(\psi(a, y) \wedge (\phi(y) \vee \neg\phi(y)))$$

Esta é a primeira generalização de quantificadores e é bem firmado na literatura que seja uma contribuição dada por Andrzej Mostowsky no seu trabalho de 1957 *On a generalization of quantifiers* (BARWISE; COOPER, 1981). Observada a forma geral voltemos um tipo particular e demos um pouco mais de atenção ao quantificador Q^R definido um pouco acima. Uma tradução desse quantificador, conhecido como quantificador de Rescher[22], é "A é um conjunto do domínio com sua cardinalidade maior do que a metade da cardinalidade do domínio" o que é fácil de associar a "para qualquer domínio finito a cardinalidade de A é maior do que seu complemento"[23]. Notemos que em termos de tradução, quem aceita com facilidade a equivalência entre "a maioria" e "mais da metade" pode ser direto em traduzir Q^R como "a cardinalidade de A é maioria no domínio". Aqui duas observações do próprio Rescher sobre seu quantificador[24] em uma "revisitação" 40 anos depois de sua apresentação.

> ... se o domínio do discurso D é finito e sua cardinalidade é especificada, então é possível, é claro, definir 'M' pelo maquinário remanescente do sistema. Por outro lado, se a cardinalidade do domínio (finito) D não é especificado, ou se ele é infinito, então $(Ma)\phi a$ não pode ser definido em termos dos recursos familiares de uma lógica quantificacional padrão [25] (RESCHER, 2004, p. 4, tradução nossa).

[21] E também apenas uma fórmula ligada ao predicado, como veremos a frente.

[22] Ver (RESCHER, 1962)

[23] Se $|A| \geq \frac{|DOM|}{2}$ então $|A| \geq |DOM - A|$

[24] 'M' em sua notação.

[25] *...if the domain of discourse D is finite and its cardinality is specified, then one can of course define 'M' by the remaining machinery of the system. However, if the cardinality of the (finite) domain D is unspecified, or if this domain is infinite, then* $(Ma)\phi a$ *cannot be defined in terms of the familiar resources of standard quantificational logic.*

E mais

> Observe que '$(Mx)(Ax \supset Bx)$' não representa 'A maioria dos A's são B's' (e, de fato, não representaria ainda que '$\supset$' fosse substituído por uma relação de implicação mais forte que a implicação material). É facilmente demonstrado que (se os A's são um subconjunto próprio do domínio do discurso e a cardinalidade desse domínio não é especificada como um número finito) 'A maioria dos A's são B's' não pode ser definido por meio dos recursos usuais de lógica quantificacional; nem mesmo quando estes são acrescidos por nossa pluriquantificação, ou qualquer outro tipo de quantificação, para este assunto. [26] (RESCHER, 2004, p. 4, 5, tradução nossa)

O quantificador de Rescher (Q^R ou M), segundo ele mesmo, é definível em primeira ordem, mas com as exigências de que o sistema tenha o domínio finito e sua cardinalidade especificada, de acordo com a primeira citação[27]. Além disso, Rescher nota que $Q^R x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$ não é uma boa tradução de "a maioria dos $\phi's$ são $\psi's$" se o domínio é infinito ou a cardinalidade do domínio não é especificada. A versão apresentada primeiramente para o quantificador Q^R, que é aquela de fato desenvolvida por Rescher, realmente não se aplica a domínios infinitos, pois seja DOM um infinito enumerável ou não $\frac{1}{2}.|DOM| = |DOM|$. Para o caso dos domínios com cardinalidade desconhecida mesmo que finita não é possível saber se $|A| > \frac{1}{2}|DOM|$. Rescher vai além nas críticas feitas a sua própria tentativa e de forma mais drástica afirma que é fácil ver que esse tipo de sentença (a maioria dos A's são B's) não pode nem mesmo ser definida usualmente em termos de uma lógica de predicados de primeira ordem. A facilidade de demonstrar isso alegada por Rescher é questionada por Westerståhl (PETERS; WESTERST, 2006, p. 62) que, aceita a declaração como verdadeira, mas diz que a prova não é trivial e que tem conhecimento de não mais que uma demonstração na literatura[28]. Como dissemos antes, o quantificador de Rescher tem o tipo semântico $\langle 1 \rangle$ (PETERS; WESTERST, 2006, p. 62). Notamos aqui que além de uma variável ligada, esse tipo semântico é aquele que se aplica à extensão de um só subconjunto do domínio, isso é, não é aplicado a mais de um predicado; o que já seria o tratamento de uma relação entre conjuntos. Um exemplo em português pode nos ajudar, pensemos na seguinte distinção em sentenças com os quantificadores "todos" e "a maioria".

"Todos são homens" / "A maioria é homem"

[26] *Observe that '$(Mx)(Ax \supset Bx)$' does not represent 'Most A's are B's' (and indeed would not do so even if '$\supset$' were replaced by an implication-relation stronger than material implication). It is readily shown that (if the A's are a proper subset of the entire domain of discourse, and the cardinality of this domain is not specified as some finite number) 'Most A's are B's' cannot be defined by means of the usual resources of quantificational logic; not even when these are supplemented by our pluralityquantification, or any other type of quantification, for that matter.*

[27] Na parte que suprimimos da citação fica claro que Rescher está propondo o uso de quantificação numérica para estes domínios restritos aos quais se refere

[28] A prova referida foi dada por Koalitis e Väänänen em 1995 e é para o enunciado: "A Maioria" não é definível em qualquer lógica da forma $FO(Q_1, ..., Q_n)$, onde os Q_i sejam de tipo $\langle 1 \rangle$.

É viável pensar que enquanto a primeira sentença tem sentido completo a segunda carece de uma prévia ou um complemento. Ao ser proferida, a primeira sentença é capaz de estabelecer o seu domínio destacando claramente um conjunto apenas de homens, enquanto a segunda deixa em aberto um questionamento como "A maioria de que (grupo, Domínio) é homem?". Há muitas questões sobre os componentes da estrutura sintática mais adequada à semântica das sentenças quantificadas com "a maioria", mas essa é uma questão ainda sobre seu tipo semântico. Por isso, nos parece interessante abrir um parêntese para uma outra abordagem que já utilizamos aqui. Uma estipulação direta de "a maioria" como quantificador 'unário'[29] não é a melhor solução como pontua Dummett com um exemplo que atribui a David Wiggins.

> nunca chegaremos a uma abordagem semântica de "a maioria", se tentarmos tratá-la como um quantificador unário; e isso pode ser demonstrado com o fracasso das estipulações diretas como esta de que : "a maioria dos F's são G's"é verdadeira apenas no caso em que "se x for F, então também é G" é verdadeira para a maioria dos objetos, ou que é verdadeira apenas no caso em que 'x é F e x é G ' é verdade para a maioria dos objetos. Só chegaremos a algum lugar se reconhecermos 'a maioria' como um quantificador binário, como 'mais ... que...'. (A lógica tradicional, é claro, tratava 'alguns' e 'todos' como quantificadores binários também: foi devido à genialidade de Frege, que viu que estes quantificadores poderiam ser tratados como unários; pensar que 'a maioria' também pode ser assim tratado é não reconhecer o brilhantismo das ideias de Frege.) Uma análise sintática incorreta (para fins semânticos) se revelará, deste modo, pelo fracasso intuitivo da estipulação direta correspondente, e é por isso que geralmente é útil, nas discussões semânticas, considerar tais estipulações. Mas isso não significa que, ao esboçar tal estipulação corretamente, tenhamos feito mais do que encontrar a forma sintática que é semanticamente manejável. [30] (DUMMETT, 1991, p. 38,39, tradução nossa)

O quantificador de Rescher se aplica à denotação de um subconjunto do domínio. Nas palavras de Dummett é um quantificador unário, em termos mais contemporâneos[31] é de tipo (type) $\langle 1 \rangle$. O que podemos dizer que há de unária é a relação entre subconjuntos do

[29] Aqui usando a terminologia do autor da citação.

[30] we shall never arrive at a semantic account of 'most' if we attempt to treat it as a unary quantifier; and this is shown by the failure of such straightforward stipulations as that 'Most Fs are Gs' is true just in case 'if x is F, then it is G' is true of most objects, or that it is true just in case 'x is F and it is G' is true of most objects. We shall get somewhere only if we recognise 'most' as being a binary quantifier, like 'more ... than ...'. (The traditional logic of course treated 'some' and 'every' as binary quantifiers also: it was due to Frege's genius that he saw that they could be treated as unary ones; to think that 'most' can also be so treated is to be unaware of the brilliance of Frege's insight.) A syntactic analysis that is incorrect (for semantic purposes) will be revealed as such by the intuitive failure of the corresponding straightforward stipulation, which is why it is often useful, in semantic discussions, to consider such stipulations. But that does not mean that, by framing such a stipulation correctly, we have as yet done more than find the semantically usable syntactic form.

[31] Como já dissemos seguimos aqui a notação de Westerståhl (WESTERSTåHL, 2007) e Peters e Westerståhl (PETERS; WESTERST, 2006) e como neste último se observa na página 86, classificar um quantificador por sua aridade pode causar uma confusão de notação com a maneira tradicional de classificação de predicados.

domínio, ou melhor dizendo, a relação que o subconjunto em questão tem com o domínio. Dito ainda de uma terceira forma, o conjunto relevante nesta operação é um subconjunto do domínio apenas, ainda que pareça estranho imaginar isso como uma relação, posto que unárias são as propriedades, esta é uma relação, pois diferentemente dos predicados unários, os elementos aqui são subconjuntos do domínio. Se o quantificador "maioria" é, de fato, uma relação binária, ternária ou n-ária, há de se esperar uma outra expressão semântica para estes quantificadores.

Na ampliação da expressão semântica de quantificadores, podemos observar que embora o predicado em ϕ numa fórmula $Qx\phi(x)$ tenha apenas uma variável 'x' livre, este predicado pode, sem qualquer prejuízo para a nossa definição, ser da forma $\phi(x, a_1...a_n)$ [32] (em que $\phi(x, \bar{a})^{\mathbf{M},x}$[33] é a extensão de $\phi(x, \bar{y})$ relativamente à atribuição da sequência $a_1...a_n$ à sequência $y_1...y_n$ no modelo $\mathbf{M}$). O que nos dá o seguinte formato generalizado $(i.g)$ de (i).

$$(i.g)\ \mathbf{M} \models Qx\phi(x, \bar{a})\ sse\ \phi(x, \bar{a})^{\mathbf{M},x} \in \mathbf{Q}^{DOM}.$$

Podemos Generalizar ainda um pouco mais e pensar um quantificador que se aplique a qualquer número 'n' finito de variáveis individuais. Nem sempre é fácil ou possível fornecer um exemplo em linguagem natural para cada tipo, cada generalização diz mais sobre a capacidade de formalização do "instrumento" quantificação generalizada do que sobre uso ou tipos de quantificadores de fato. Em todo caso um exemplo do quantificador do tipo que descreveremos abaixo quando $n = 2$ pode ser o quantificador matemático $Q^{\prec M}(R) = \{R \subseteq M^2 : R \text{ é } um\ bom\ ordenamento\ em\ M\}$. A forma geral dos quantificadores de tipo $\langle n \rangle$ é:

$$Qx_1...x_n\phi(x_1, ..., x_n) \text{ ou } Q\bar{x}\phi(\bar{x}) \text{ de tipo semântico } \langle n \rangle.$$

Retomando a questão sobre o quantificador "a maioria" notemos que a questão aqui é definir a relação entre dois conjuntos tal que um seja maioria do outro e ambos pertençam a um mesmo domínio. Denotados conjuntos na linguagem por predicados ou relações e não por constantes individuais. Sendo assim, as últimas generalizações realizadas não são suficientes para nosso objetivo. Um quantificador como "maioria", "binário" nos termos de Dummett, é então tipo $\langle 1, 1 \rangle$. Em 1966 na 32ª edição do periódico suíço *Theoria*, Per Lindström publica a sequência de papers *On characterizability in* $L_{\omega_1\omega_0}$, *On relations between structures* e por fim *First order predicate logic with generalizad quantifiers*, neste

[32] Na verdade o predicado isoladamente é algo como $P(x, a_1...a_n)$ e $\phi(x, a_1...a_n)$ é uma fórmula que cumpre o requisito de ter ao menos um predicado com a forma de P.

[33] Onde $\bar{j} = (j_1...j_n)$ para qualquer constante ou variável individual 'j'.

trabalho Lindström[34] apresenta a definição de verdade para um quantificador generalizado, de modo mais abrangente do que em $(i.g)$ para quantificadores com a máxima[35] generalização possível.

$$(ii)\ \ \mathbf{M} \models Q\bar{x}_1...\bar{x}_n(\psi_1(\bar{x}_1)...\psi_n(\bar{x}_n))\ sse\ \left\langle \psi_1(\bar{x}_1)^{\mathbf{M},\bar{x}_1}, ..., \psi_n(\bar{x}_n)^{\mathbf{M},\bar{x}_n} \right\rangle \in \mathbf{Q}^{DOM^n}.$$

A enupla ordenada pertencente ao conjunto $\mathbf{Q}^{DOM^n}$ é um subconjunto do produto cartesiano DOM^n. Por simplificação, representaremos cada elemento de $\mathbf{Q}^{DOM^n}$ como uma relação, digamos $Q_{DOM}(\psi_1(\bar{x}_1)^{\mathbf{M},\bar{x}_1}, ..., \psi_n(\bar{x}_n)^{\mathbf{M},\bar{x}_n})$. Note que esta relação é de segunda ordem, pois Q_{DOM} é uma relação entre propriedades/relações (estas sobre indivíduos) sobre DOM. A definição acima representa um quantificador de tipo $\langle n_1, ..., n_n \rangle$, isso é um quantificador aplicado a n predicados com n variáveis.

Como dissemos, um pouco antes, sobre a definição de um quantificador "maioria", a questão é definir a relação entre dois conjuntos tal que um seja maioria do outro, o que nós também podemos ler como a maior parte dos elementos de um conjunto também são elementos do outro. É necessário garantir que A e B estejam relacionados de alguma forma[36], isso é, $|A| > \frac{1}{2}.|B|$, caso os conjuntos em questão sejam finitos, não diz mais do que "A tem uma cardinalidade maior do que a metade da cardinalidade de B". Na condição em que "$A \subseteq B$", por outro lado, estamos diante de uma outra definição para Q^R como um quantificador proporcional (PETERS; WESTERST, 2006, p. 61). Como uma alternativa, para domínios finitos, a forma direta de pensar essa relação (a maioria dos A's são B's) seria:

$$|A \cap B| > \tfrac{1}{2}.|A|$$

De modo mais abrangente a maneira mais conhecida de expressar essa relação dados conjuntos A e B subconjuntos de um domínio DOM é a seguinte.

$$|A^{DOM} \cap B^{DOM}| > |A^{DOM} - B^{DOM}|$$

Para um maior esclarecimento de como isso se transporta para uma linguagem formal, considere que $\mathbf{Q}^{Ma}$ é o conjunto de subconjuntos de DOM^2 onde para todo $X \subseteq \mathbf{Q}^{Ma}$ e quaisquer $A, B \subseteq X$ a definição de "maioria" acima se verifica. Considere ϕ e ψ[37] sejam fórmulas com uma variável livre, que tenham A^{DOM} e B^{DOM} como extensão em

[34] Vale a observação de que a notação de Lindström é bem diferente da usada nos dias de hoje, nossa notação segue um padrão que pode ser vista em (KRYNICKI; MOSTOWSKI, 1993), (PETERS; WESTERST, 2006) e (SZYMANIK, 2016).

[35] Essa afirmação tem pelo menos uma ressalva referente a quantificadores ambíguos.

[36] Especificamente que compartilhem elementos.

[37] Podemos pensar em fórmulas com predicados de qualquer aridade ou mesmo em fórmulas com apenas uma variável livre.

um modelo $\mathbf{M}$ ($A^{DOM} = \phi(x)^{\mathbf{M},x}$ *e* $B^{DOM} = \psi(x)^{\mathbf{M},x}$), considere ainda um quantificador Q^{Ma} a "Maioria" denota o conjunto $\mathbf{Q}^{Ma}$ em $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{M} \models Q^{Ma}x(\phi(x), \psi(x)) \ sse \ \left\langle \phi(x)^{\mathbf{M},x}, \psi(x)^{\mathbf{M},x} \right\rangle \in \mathbf{Q}^{Ma}$$

O trabalho que nos demos em apresentar o quantificador de Rescher e chegar a um quantificador que expresse a ideia de "maioria" nos dá um indício de como é difícil transportar o significado de um quantificador para dentro de uma linguagem formal. Ao que tudo indica, a estipulação utilizada para apresentar o valor de verdade de uma sentença com o quantificador "a maioria" é dada de forma satisfatória para que possa conhecer as condições de verdade desse tipo de sentença. Queremos com isso dizer simplesmente que parece consensual que "maioria" signifique "mais da metade" e assim "a intersecção entre dois conjuntos ser maior do que sua diferença" é uma boa representação semântica. Cabe a questão de quão lógica é essa representação. Mais uma vez queremos com isso dizer uma coisa simples. Não estamos em busca de um critério de logicidade e menos ainda de uma lógica como a lógica subjacente a outras lógicas. A questão é na realidade quão próximo e relacionado aos quantificadores da lógica (clássica como paradigma) está o novo quantificador (trataremos essa questão em 1.3) e da mesma forma quão próximo está um sistema com este quantificador de um sistema de lógica clássica de primeira ordem (o que tratamos em 1.4). O nosso objetivo com isso é investigar alguns níveis de precisão em nossa quantificação e por isso introduziremos novos quantificadores em nosso debate (O que faremos ao longo do capítulo 2).

1.3 Propriedades dos quantificadores.

Podemos iniciar a problematização da questão que encerra a seção anterior com uma análise sobre as características que diferenciam quantificadores tradicionais ($\forall$ e $\exists$) do quantificador Q^{Ma}, como um exemplo de quantificador distinto dos tradicionais e introduzido pela definição de quantificação generalizada. Por uma questão prática de identificação, chamaremos os primeiros quantificadores de "quantificadores lógicos" de agora em diante. Algo que nossa abordagem pode deixar parecer é que a principal diferença entre quantificadores lógicos e o mais novo quantificador apresentado é que enquanto Q^{Ma} é de tipo $\langle 1, 1\rangle$, os quantificadores lógicos, que foram apresentados nos exemplos $(i.a)$ como de tipo $\langle 1\rangle$, só podem ser representados com esse tipo. Aliás, apresentamos o caso contrário para Q^{Ma} ao citar o comentário de Dummett ao exemplo de Wiggins, onde seguimos a argumentação de que este quantificador só pode ser abordado semanticamente como binário. Não é o caso que essa impressão, que podemos ter provocado, se confirme. De fato podemos definir um quantificador $Q^{\forall}$ de acordo com (ii) na página 38 do seguinte

modo dados $A, B \subseteq M$[38] ($A = \phi(x)^{\mathbf{M},x}$ *e* $B = \psi(x)^{\mathbf{M},x}$) em um modelo $\mathbf{M}$.

$$Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x)) \ sse \ \phi(x)^{\mathbf{M},x} \subseteq \psi(x)^{\mathbf{M},x} \Rightarrow \text{Todos os } \phi\text{'s são } \psi\text{'s.}$$

Assim acontece também com um quantificador $Q^{\exists}$ tipo $\langle 1, 1\rangle$ da forma:

$$Q^{\exists}x(\phi(x), \psi(x)) \ sse \ \phi(x)^{\mathbf{M},x} \cap \psi(x)^{\mathbf{M},x} \neq \emptyset \Rightarrow \text{Pelo menos um } \phi \text{ é } \psi.$$

A questão sobre a diferença entre quantificadores lógicos e Q^{Ma} pode ser reformulada da seguinte maneira: o que distingue nossa definição dada a Q^{Ma} das dadas a $Q^{\forall}/Q^{\exists}$? O que pode se perceber, e que não seria visível em uma estipulação direta, é que a definição de Q^{Ma} é a única que traz a noção de cardinalidade dos conjuntos em questão de forma explícita. Antes de tratar a cardinalidade, no entanto, nos será útil saber quais conjuntos estão em questão na definição de um quantificador. Qualquer declaração quantificada é uma quantificação sobre um domínio de discurso, essa declaração que parece trivial é de certa forma reveladora quanto à necessidade de termos quantificadores que mantenham o significado das sentenças em que estão independentemente do domínio do discurso. O domínio é sem dúvida o primeiro conjunto a se considerar tendo em vista a invariância do significado de um quantificador, ou melhor, sua neutralidade temática[39]. Abaixo uma consideração sobre o tema extraído por Matthew Mckeon de *What are logical notions?*, trabalho de Tarski publicado postumamente.

> Uma maneira de tornar preciso o conceito de neutralidade temática é seguir a sugestão de Tarski em (1986) de que as noções lógicas expressas em uma linguagem L são aquelas noções invariantes sob todas as transformações um-para-um do domínio do discurso nele mesmo. Uma transformação um-para-um do domínio do discurso em si mesmo é uma função bijetora cujo domínio e imagem coincidem com o domínio do discurso. E uma função um-para-um é uma função que sempre atribui valores diferentes a objetos diferentes em seu domínio (ou seja, para todos x e y no domínio de f, se $f(x) = f(y)$, então $x = y$)[40] (MCKEON, 2010, p. 109, tradução nossa).

A propriedade definida acima é conhecida como fechamento sobre isomorfismo. Na literatura sobre quantificadores generalizados, chamamos essa propriedade simplesmente de ISOM (ver. (WESTERSTåHL, 2016), (PETERS; WESTERST, 2006), (SZYMANIK, 2016) e (WESTERSTåHL, 2007)). Lembrando que um quantificador arbitrário Q é interpretado

[38] Usaremos M para domínio a partir daqui no lugar de DOM.

[39] Topic neutrality

[40] One way of making the concept of topic neutrality precise is to follow Tarski's suggestion in his (1986) that the logical notions expressed in a language L are those notions that are invariant under all one-one transformations of the domain of discourse onto itself. A one-one transformation of the domain of discourse onto itself is a one-one function whose domain and range coincide with the domain of discourse. And a one-one function is a function that always assigns different values to different objects in its domain (i.e., for all x and y in the domain of f, if f(x)=f(y), then x=y).

como uma relação de segunda ordem Q_{DOM} (agora Q_M) podemos adotar aqui a definição de ISOM para um quantificador arbitrário Q de (PETERS; WESTERST, 2006, p. 99).

Q é ISOM se e somente se para toda estrutura $(M, R_1, ..., R_k)$ e toda função $1-1$ f no domínio M

(1.3.a) $Q_M(R_1, ..., R_k)$ *sse* $Q_{f(M)}(f(R_1), ..., f(R_k))$ onde $f(R_i) = (f(a_1), ..., f(a_{ni})) : (a_1, ..., a_{ni}) \in R_i$.

Vejamos como isso funciona com um exemplo ilustrativo simplificado para o caso dos quantificadores de tipo $\langle 1, 1\rangle$ definidos até aqui. Consideremos uma estrutura $\mathbf{M} = \langle M, I\rangle$ de domínio:

$$M = \{Moe,\ Larry,\ Curly,\ Flávio,\ Carlos,\ Eduardo\}$$

E interpretação

$$I = \langle C, Rel\rangle^{41}$$

Onde C é o conjunto das funções que interpretam as constantes em $\mathbf{M}$ e Rel o conjunto das enuplas ordenadas que interpretam relações n-árias em $\mathbf{M}$ como descreveremos a seguir.

Para cada elemento i de M a denotação $i^{\mathbf{M}}$ de i é igual a i, por exemplo, $(Moe^{\mathbf{M}} = Moe)$ e $Moe \in C$. Assim, $C \subseteq M$ e nossa estrutura é basicamente $\langle M, R\rangle$ que é uma estrutura como aquelas para as quais deve valer ISOM, como aparece na definição. Abaixo a separação dos elementos e da interpretação do conjunto Rel.

Tabela 1 – Conjunto *Rel*

Denotação	**Extensão**	**Interpretação**
$\psi(x)$	$\psi(x)^{\mathbf{M},x} = \{Moe,\ Larry,\ Curly\}$	"x é um pateta"
$\phi(x)$	$\phi(x)^{\mathbf{M},x} = \{Flávio,\ Eduardo,\ Carlos\}$	"x é fruto da burrice humana"
$\psi_1(x)$	$\psi_1(x)^{\mathbf{M},x} = \{Moe,\ Larry,\ Curly\}$	"x faz vídeos ridículos"
$\phi_1(x)$	$\phi_1(x)^{\mathbf{M},x} = \{Carlos\}$	"x é o orgulho do papai"

As sentenças abaixo são exemplos de sentenças verdadeiras em uma linguagem para $\mathbf{M}$ com os quantificadores Q^{Ma}, $Q^{\exists}$, $Q^{\forall}$.

[41] A letra R precisa ser preservada para coisa mais útil que os seis patetas.

$$\mathbf{M} \models Q^{\exists}x(\psi(x), \psi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models Q^{\forall}x(\psi(x), \psi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models Q^{Ma}x(\phi_1(x), \phi(x))$$
$$\mathbf{M} \models Q^{Ma}x\neg(\psi(x), \phi(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models Q^{\exists}x\neg(\phi(x), \phi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models Q^{\forall}x\neg(\psi(x), \phi_1(x))$$
$$\mathbf{M} \models \neg Q^{\forall}x(\psi(x), \phi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models \neg Q^{Ma}x(\psi_1(x), \phi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \models \neg Q^{\exists}x(\psi_1(x), \phi_1(x))$$

Vejamos alguns casos.

Q$^{\exists}$ $Q^{\exists}x(\psi(x), \psi_1(x))$ nos diz que $\psi(x)^{\mathbf{M},x} \cap \psi_1(x)^{\mathbf{M},x} \neq \emptyset$ e isso é o caso, pois os dois conjuntos têm os mesmos elementos a saber, $\{Moe,\ Larry,\ Curly\}$.

Q$^{\forall}$ $Q^{\forall}x\neg(\psi(x), \phi_1(x))$[42] que passo-a-passo entenderemos informalmente como, **primeiro** $Q^{\forall}$"*não é o caso que*" $(\psi(x), \phi_1(x))$, isso é o mesmo que, **segundo** "para todos que são $\psi(x)$, *não é o caso que* sejam $\phi_1(x)$", não ser $\phi_1(x)$ nos diz, em **terceiro** lugar, que o todos os ψ's estão contidos na extensão do conjunto $(M - \phi(x)^{\mathbf{M},x})$. Agora de modo bem direto $\mathbf{M} \models Q^{\forall}x\neg(\psi(x), \phi_1(x))$ sse $\psi(x)^{\mathbf{M},x} \subseteq M - \phi_1(x)^{\mathbf{M},x}$. Como $\phi_1(x)^{\mathbf{M},x} = Carlos$ e M é todo o domínio, então $M - \phi_1(x)^{\mathbf{M},x} = \{Moe,\ Larry,\ Curly,\ Flávio,\ Eduardo\}$ e $\psi(x)^{\mathbf{M},x} = \{Moe,\ Larry,\ Curly\}$ Podemos confirmar que a fórmula é verdadeira no modelo.

Q^{Ma} $\neg Q^{Ma}x(\psi_1(x), \phi_1(x))$ se compromete, informalmente dizendo, como o fato de que "*não é verdade que a maioria dos* ψ_1's sejam também ϕ_1's. Isso é, "*não é verdade que*" $|\psi_1(x)^{\mathbf{M},x} \cap \phi_1(x)^{\mathbf{M},x}| > |\psi_1(x)^{\mathbf{M},x} - \phi_1(x)^{\mathbf{M},x}|$. Nessa inequação o lado esquerdo tem a cardinalidade 0 pois a interseção é o conjunto vazio. Como *não é verdade* que a cardinalidade de 0 seja maior do que a de qualquer $n \in \mathbb{N}$ sabermos que a sentença é verdadeira em **M**.

Vejamos também alguns exemplos de sentenças falsas.

$$\mathbf{M} \not\models Q^{Ma}x(\psi(x), \phi(x)) \text{ - } \mathbf{M} \not\models \neg Q^{\exists}x\neg(\phi_1(x), \psi_1(x)) \text{ - } \mathbf{M} \not\models \neg Q^{\forall}x(\psi(x), \psi_1(x))$$

Observe que a demonstração da falsidade de $Q^{Ma}x(\psi(x)_1, \phi(x)_1)$ é parte da prova (até o penúltimo passo), de que $\neg Q^{Ma}x(\psi(x)_1, \phi(x)_1)$ é verdadeira. A falsidade da sentença

[42] Trouxemos a negação para o jogo muito cedo, se a explicação não for suficiente o leitor pode consultar as definições **2.1.a** e **2.1.b** além das definições iniciais no capítulo 0.

se deve basicamente no fato de que $|\psi_1(x)^{\mathbf{M},x} \cap \phi_1(x)^{\mathbf{M},x}| = 0$. A demonstração é identica para a falsidade de $Q^{Ma}x(\psi(x), \phi(x))$.

Agora podemos retornar ao objetivo de nosso exemplo, uma função f, tal que $f(i)$ atribui a cada $i \in M$ um outro elemento $i_2 \in M$, sendo $i \neq i_2$ e $f(i)$ preserve o valor de verdade de todas as fórmulas que pudermos construir na linguagem que associamos ao modelo $\mathbf{M}$ com os quantificadores já definidos (Q^{Ma}, $Q^{\exists}$, $Q^{\forall}$) quando substituirmos cada i pela função $f(i)$ em cada ocorrência em tais fórmulas. Em especial, e como exemplo, a função preserva em $\mathbf{M}$ a verdade daquelas fórmulas que apresentamos acima.

Para encurtar as definições, e por uma razão que discutiremos adiante, diremos que se a função $f(i) = i_2$, então existe uma e apenas uma função $f(i_2) = i$. Definimos que f faz as seguinte associações:

$$f(Moe) = Eduardo,\ f(Larry) = Carlos \text{ e } f(Curly) = Flávio$$

De volta à definição **1.3.a** vemos que a função f para cada relação R (e para esse caso específico Rel) é definida da seguinte forma $f(R_i) = (f(a_1), ..., f(a_{ni})) : (a_1, ..., a_{ni}) \in R_i$ para o conjunto de relações de $\mathbf{M}$. No nosso caso em $f(Rel)$ é a função $f(X(i)) = X(f(i))$ para todo elemento $X \in Rel$. E assim vamos mais uma vez às extensões de ψ, ψ_1, ϕ, ϕ_1.

Tabela 2 – Conjunto imagem da função $f(Rel)$

Denotação	**Extensão**	**Saída da função**
$f(\psi(x)) = \psi(f(x))$	$\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)} = \{f(Moe),\ f(Larry),\ f(Curly)\}$	$\{Eduardo,\ Carlos,\ Flávio\}$
$f(\phi(x)) = \phi(f(x))$	$\phi(x)^{\mathbf{M},f(x)} = \{f(Eduardo),\ f(Carlos),\ f(Flávio)\}$	$\{Moe,\ Larry,\ Curly\}$
$f(\psi_1(x)) = \psi_1(f(x))$	$\psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} = \{f(Moe),\ f(Larry),\ f(Curly)\}$	$\{Eduardo,\ Carlos,\ Flávio\}$
$f(\phi_1(x)) = \phi_1(f(x))$	$\phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} = \{f(Carlos)\}$	$\{Larry\}$

Q$^{\exists\prime}$ $Q^{\exists}x(\psi(x), \psi_1(x))$ é verdadeira para os valores de $f(x)$ onde $\psi(x)^{\mathbf{M},(f(x))} \cap \psi_1(x)^{\mathbf{M},(f(x))} \neq \emptyset$ isso quer dizer qualquer elemento do conjunto $\{f(Moe),\ f(Larry),\ f(Curly)\}$ que são exatamente os elementos da interseção $\{Eduardo,\ Carlos,\ Flávio\}$. Portanto, $Q^{\exists}x(\psi(x), \psi_1(x))$ permanece verdadeira.

Q$^{\forall\prime}$ $Q^{\forall}x\neg(\psi(x), \phi_1(x))$ é verdadeira para todos os valores de $f(x)$ em que

$$\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)} \subseteq M - \phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)}$$

Isso é, todos os elementos do conjunto $\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)}$ que não estejam em $\phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)}$ estes são $\{Eduardo,\ Carlos,\ Flávio\}$, isso é, todos os valores de $\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)}$. Por isso a fórmula permanece verdadeira.

$\mathbf{Q}^{Ma\prime}$ $\neg Q^{Ma}x(\psi_1(x), \phi_1(x))$ é verdadeira para os valores de $f(x)$ tal que:

$$f(x) = |\psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} \cap \phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)}| > |\psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} - \phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)}|$$

Se quisermos a condição específica em que $\mathbf{M} \models \neg Q^{Ma}x(\psi_1(x), \phi_1(x))$, então $f(x) = \psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} \cap \phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} = \emptyset$. Observemos que nos valores possíveis de nossa nova interpretação esse é o caso e a fórmula é verdadeira.

Veja também que as sentenças falsas em $\mathbf{M}$ que apresentamos[43], permanecem falsas. Pois, $|\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)} \cap \phi(x)^{\mathbf{M},f(x)}| = 0$, $\psi(x)^{\mathbf{M},f(x)} \subseteq \psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)}$ enquanto a segunda sentença nega esse fato, portanto é falsa. Por fim, a terceira sentença afirma que a interseção $(\phi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)} \cap M - \psi_1(x)^{\mathbf{M},f(x)})$ seria vazia, mas na verdade o conjunto $\{f(Carlos)\} = \{Larry\}$ está nessa interseção, portanto a sentença também é falsa.

Algumas observações sobre o exemplo são importantes. Não se tem nem de longe a pretensão de isso seja uma prova, mas de uma ilustração. Provar ISOM para os quantificadores é uma generalização para todos os modelos e funções. Aqui apresentamos apenas uma função entre as possíveis para o modelo de exemplo. Não era necessário que todas as relações fossem unárias, mas que as fórmulas no escopo dos quantificadores tivessem apenas uma variável livre. Optamos por simplificação no exemplo, que apesar de tudo já é extenso, mas o leitor pode notar a possibilidade da construção de fórmulas do tipo $Q^{Ma}x(\lambda(x, Moe), \psi(x))$ com a extensão de lambda sendo o conjunto dos pares ordenados $\langle x, y\rangle$ pertencente a algum subconjunto de M^2, com a interpretação "x é irmão de y", por exemplo.

A observação importante a ser feita aqui é o reforço de que **(1.3.a)** deve valer para toda estrutura e consequentemente todo domínio M. Uma função f que seja $1-1$ de um domínio específico para si mesmo é um Automorfismo e um quantificador Q fechado sobre automorfismo é dito PERM, ou fechado sobre permutação mas não necessariamente ISOM. Quantificadores com esta propriedade (ISOM) se comportam da mesma forma em estruturas isomórficas. Dito de outra forma "deve ficar claro que esta é uma maneira precisa de expressar a ideia de Mostowski de que eles não nos permitem distinguir entre elementos do universo, ou seja, a ideia de neutralidade temática. (PETERS; WESTERST, 2006, p. 99, tradução nossa)"[44]. Realizamos no exemplo, um automorfismo, mas apresentamos nossa função de forma homogênea dividindo três elementos para cada lado atribuindo univocamente a função de $i \to i_2$ e de $i_2 \to i$. Desse modo, é fácil perceber que se tivéssemos dois domínios de mesma cardinalidade o resultado seria o mesmo. Retomando a questão que encerra a seção anterior, seria ISOM a propriedade que distingue quantificadores

[43] $Q^{Ma}x(\psi(x), \phi(x))$, $\neg Q^{\forall}x(\psi(x), \psi_1(x))$ e $\neg Q^{\exists}x\neg(\phi_1(x), \psi_1(x))$

[44] *It should be clear that this is a precise way of expressing Mostowski's idea that they do not allow us to distinguish between elements of the universe, i.e. the idea of topic neutrality.*

lógicos de outros tipos? Neutralidade temática é critério de logicidade em muitos livros texto, mas não é o suficiente aqui.

> A chave aqui é que a cardinalidade do subconjunto do domínio D que satisfaz uma L-fórmula sob uma interpretação é invariável sob cada transformação individual de D em si mesma. Por exemplo, se pelo menos dois elementos de D satisfazem uma fórmula em uma interpretação, então pelo menos dois elementos de D' satisfazem a fórmula sob I' induzida por f. Isso faz com que 'Todos' e 'Alguns' tenham neutralidade temática, mas também qualquer quantificador de cardinalidade, como 'A maioria', 'Finitariamente muitos', 'Poucos', 'Pelo menos dois', etc. [45] (MCKEON, 2010, p. 111, tradução nossa)

Se a "chave" é a cardinalidade dos subconjuntos do domínio, fica difícil classificar estes últimos ('Most', 'Finitely many', 'Few', 'At least two') quantificadores como "cardinais" em detrimento dos quantificadores lógicos, também dependentes da cardinalidade do domínio. Dois pontos a considerar: Nossa observação sobre o papel da cardinalidade na definição de Q^{Ma} foi indevida? E mais, Q^{Ma} pode ter o status de quantificador lógico? Trataremos isso a seguir. Antes disso, achamos importante manifestar a discordância que temos da declaração de Mckeon de que "poucos" tenha "neutralidade temática", que será melhor abordada mais a frente.

A afirmação de Mckeon (a) e uma posição nossa (b) que apresentamos no início da seção não devem se confundir, pois:

(a) a importância da invariância da cardinalidade dos subconjuntos do domínio do discurso (mediante uma transformação em uma função $1-1$ de D para D) não nos dá uma resposta para o problema que levantamos quando dissemos que

(b) antes de tratar a cardinalidade devemos saber que conjuntos estão em jogo quando definimos um quantificador[46].

A afirmação (a), discutida por Taski no artigo em questão, provavelmente já foi demonstrada e pode ser melhor entendida de uma forma mais ou menos óbvia: Um quantificador trata exclusivamente de quantidades. Embora (a) não seja uma responta completa a (b) ela é um caminho. Observado o papel do domínio passemos à questão sobre que subconjuntos do domínio têm alguma relevância na definição de um quantificador.

Ao escolher Q^{Ma} como paradigma de diferença entre quantificadores, nos vimos obrigados a apresentar a distinção entre tipos de quantificadores ($\langle n \rangle$, $\langle n_1, ..., n_n \rangle$ etc.).

[45] Key here is that the cardinality of the subset of the domain D that satisfies an L-formula under an interpretation is invariant under every one-one transformation of D onto itself. For example, if at least two elements from D satisfy a formula on an interpretation of it, then at least two elements from D' satisfy the formula under the I' induced by f. This makes not only 'All' and 'Some' topic neutral, but also any cardinality quantifier such as 'Most', 'Finitely many', 'Few', 'At least two' etc...

[46] Na primeira página dessa seção.

Mas vamos nos centrar no caso de quantificadores muito específicos entre todos esses possíveis. Quantificadores como Q^{Ma} são domínio restritores, chamaremos as expressões que correspondem na linguagem natural a fórmulas com tais quantificadores de *quantirrelações*. As quantirrelações são de amplo uso em linguagem natural, correspondem semanticamente a quantificadores de tipo $\langle 1, 1\rangle$. Quantificadores de tipo $\langle n_1, ..., n_n\rangle$ onde cada $n_i = 1$ são chamados *monádicos*, portanto, quantirrelações correspondem a quantificadores monádicos. O que significa semanticamente ser monádico é ser uma relação entre dois conjuntos que têm elementos simples e não enuplas ordenadas. Agora vamos finalmente observar o papel dos subconjuntos do domínio na definição dos quantificadores.

Se em uma relação entre os conjuntos $A, B \subseteq M$, as propriedades do domínio M não têm influência sobre o resultado da relação, o primeiro conjunto a se considerar é o conjunto $A \cup B$.

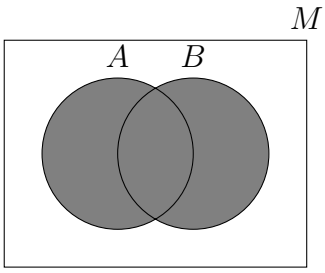


Figura 3 – EXT Representação

Envolvidos em nosso problema estão os conjuntos (e mais especificamente a cardinalidade de cada um deles) $(A - B)$, $(B - A)$ e $A \cap B$. A cardinalidade de $M - (A \cup B)$ não cumpre qualquer papel aqui e, por isso, podemos dizer que tais conjuntos (os primeiros), indiferentemente do domínio em que estejam, e mantendo constantes suas cardinalidades, podem representar um quantificador Q^M tipo $< 1, 1 >$ [47] que tenha uma propriedade conhecida com "independência de domínio". Generalizando, dada qualquer expansão do domínio M em um domínio M' tal que $M \subseteq M'$, qualquer relação R_i, sendo i a aridade de R, e qualquer produto cartesiano do domínio M^{n_i}, onde n_i indica o tamanho do produto cartesiano relativamente ao número de relações, dizemos que um quantificador é EXT[48]:

(1.3.b) Se $R_i \subseteq M^{n_i}$ para $1 \leq i \leq k$, então $Q_M(R_1, ..., R_k)$ *sse* $Q_{M'}(R_1, ..., R_k)$

Aqui é possível notar alguma diferença entre quantificadores, a saber, enquanto o quantificador tipo $\langle 1\rangle$ $\exists$ e os quantificadores tipo $\langle 1, 1\rangle$ $Q^{\exists}$, $Q^{\forall}$ e Q^{Ma} têm a propriedade

[47] Dado que este quantificador é uma relação Q_M(A,B).

[48] Em razão da expansão do domínio, em inglês chamada de *extension* na literatura corrente. ver (PETERS; WESTERST, 2006) e (SZYMANIK, 2016).

EXT, o quantificador $\forall$ e o quantificador Q^R não têm. A maneira rápida de perceber isso olhando para a participação do domínio M na definição desses últimos. A diferença aqui observada, no entanto, não é a que procuramos ainda. Ademais, a definição de quantificadores pode ser dependente ainda de um número menor de conjuntos. Tendo em consideração a lista de frases quantificadas abaixo.

1.3.b.1

(i) Todo menino é um rei.

(ii) Algum menino é um rei.

(iii) Nenhum menino é um rei.

(iv) Poucos meninos são reis.

(v) A maioria dos meninos são reis.

Todas elas quando são arregimentados como da forma $Q^M(A, B)$, onde Q^M é qualquer um dos quantificadores acima ('todo', 'algum', 'nenhum', 'poucos' e 'a maioria'), $A = \{x \in M/\ x \text{ é } um\ menino\}$ e $B = \{x \in M/\ x \text{ é } um\ rei\}$, por isso de tipo $\langle 1, 1\rangle$. Em todos os casos a proporção de A que também é B é o que está em questão e não há consideração sobre a parte dos elementos de B que não sejam elementos de A. E dito ainda de outra forma, todas as frases são representadas semanticamente por uma relação em M^2 do tipo $Q_M(A, B)$. Descendo ao nível estrutural de Q_M, encontramos uma coisa curiosa, o fato de que essa relação, na interpretação de todas as frases, possui a propriedade interessante, conhecida como conservatividade e muito diretamente apresentada por Chierchia (2003, p. 96) ao dizer que "uma relação R é conservativa se, e apenas se, toda vez que R é verdadeiro para A e B também será verdadeiro para A e $A \cap B$". Junto com isso Chierchia[49] nos dá uma forma simples de observar essa propriedade em frases do português, parafraseando Chierchia para o uso de nossos exemplos (i - v) a que classe de indivíduos se refere ser "um menino (que é) rei"? Ora, à classe de todos que são ao mesmo tempo "menino" e "rei" e por isso esse predicado denota precisamente a interseção entre o conjunto dos "homens" e o conjunto dos "reis".

[49] Mais especificamente, Pagani et al em sua tradução adaptativa.

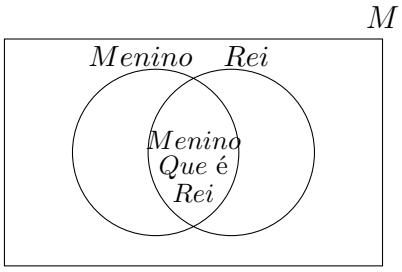


Figura 4 – Conservatividade em Linguagem Natural

Sendo assim é possível observar a conservatividade no português com a seguinte forma redundante das frases (i) a (v):

1.3.b.2

(i') Todo menino é um menino que é rei.

(ii') Algum menino é um menino que é rei.

(iii') Nenhum menino é um menino que é rei.

(iv') Poucos meninos são meninos que são reis.

(v') A maioria dos meninos são meninos que são reis.

Vendo como fizemos com EXT quais os conjuntos que são influentes em CONS (propriedade relativa à conservatividade para os quantificadores) temos os conjuntos $(A-B)$ e $(A \cap B)$ destacados na figura abaixo.

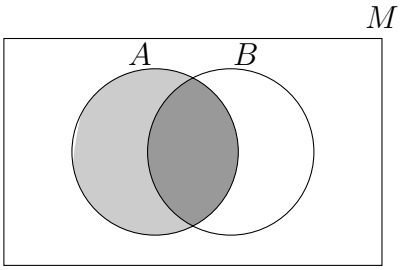


Figura 5 – CONS Representação

Conservatividade é uma propriedade de quantificadores de tipo $\langle 1, 1\rangle$ e se deve especialmente ao fato de que esse tipo de quantificador realiza uma restrição no domínio. Vamos então definir precisamente conservatividade. Um quantificador Q de tipo $\langle 1, 1\rangle$ é conservativo (CONS) se, e somente se, para todo M e $A, B \subseteq M$:

(1.3.c) $Q_M(A, B)$ *sse* $Q_M(A, A \cap B)$

Existe um universal linguístico sobre esse tipo de quantificador em sua abordagem como determinante (que trataremos mais a frente) de que eles são ubíquos nas línguas naturais. Isso é, um determinante em linguagem natural tem conservatividade e por isso se restringe ao tratamento de dois conjuntos: $(A - B)$ e $(A \cap B)$.

Antes de prosseguirmos, sentimos que um reavivamento do objetivo da seção e um delineamento de nossa estratégia de investigação devem ser feitos. Primeiro, lembremos que chegamos a 1.3 a partir da questão final de 1.2 "Quão próximo ou relacionado aos quantificadores da lógica clássica está o quantificador Q^{Ma}?". O que estamos fazendo até aqui é procurando uma resposta interna ao quantificador, com isso querendo dizer, a partir das propriedades dos conjuntos (subconjuntos do domínio) que ajudam a definir o quantificador. A estratégia é basicamente encontrar aquela propriedade (se é que existe) que corresponde ao mínimo necessário para que um quantificador seja lógico e confrontar essa condição com as propriedades de Q^{Ma}. Observe que descemos três "níveis", por assim dizer. Em ISOM vimos a relevância do domínio, em EXT que no lugar do domínio o que importa é a união dos subconjuntos do domínio que são extensão das propriedades no escopo do quantificador Q. Por fim, em CONS vimos que ao menos uma parte dessa união é desprezível. Continuaremos descendo outros níveis.

A restrição feita para $A's$ que são $B's$ nos dá a oportunidade de analisar se não seria a mera interseção o conjunto relevante aqui. Em mais uma definição de Westerståhl (PETERS; WESTERST, 2006, p. 210) temos que um quantificador é intersecivo (INT) se o valor de verdade de $Q_M(A, B)$ depende somente de $A \cap B$ e, assim, define para todo M e $A, B, A', B' \subseteq M$

(1.3.d) Se $A \cap B = A' \cap B'$ então $Q_M(A, B)$ *sse* $Q_{M'}(A', B')$

Observemos rapidamente essa definição para ver se não fomos longe demais nesta restrição de conjuntos em busca do "mínimo necessário para que um quantificador seja lógico". Suponhamos que Q_M seja a relação que expressa o quantificador $Q^{\exists}$. Consideremos duas possibilidades para $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ e $A \cap B = A' \cap B' \neq \emptyset$. No primeiro caso $Q^{\exists}(A, B)$ é falso, ou não existe A que seja B e o mesmo acontece com $Q^{\exists}(A', B')$ no segundo caso tanto $Q^{\exists}(A, B)$ quanto $Q^{\exists}(A', B')$ são verdadeiros. Temos então um quantificador lógico que passa no teste. A jugar pela forma do quantificador Q^{Ma} já se pode abrir uma suspeita sobre ele não ser (como de fato não é) INT. Acontece que esta também não é a marca que distingue os quantificadores lógicos de Q^{Ma}. Levemos em

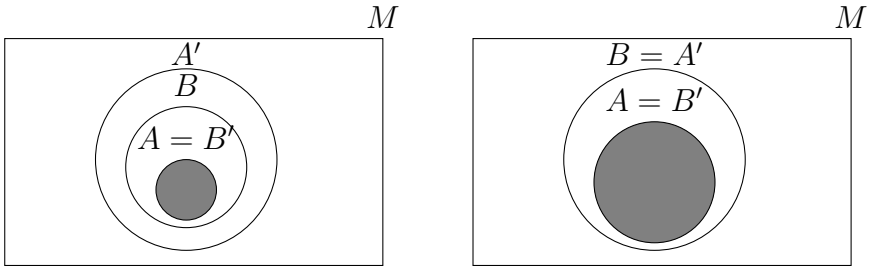


Figura 6 – Exemplos de não INT

consideração o quantificador $Q^{\forall}$ é fácil encontrar um contraexemplo que demonstra que ele não é INT. Vejamos, dados os conjuntos $A, B, A', B' \subseteq M$, as condições seguintes satisfazem ambos os quadros na figura 6. (I) $A \cap B = A$, (II) $A' \cap B' = B'$, (III) $B \subseteq A'$ e (IV) $A \neq B$:

Os quadros na figura 4 são a ilustração de nosso contraexemplo. Apresentamos uma prova no apêndice A. Nos desenhos temos $A \cap B = A' \cap B'$ como a área cinzenta e nos dois casos podemos ver que ao mesmo tempo $Q^{\forall}(A, B)$ e $\neg Q^{\forall}(A', B')$. INT implica simetria, uma outra propriedade que $Q^{\forall}$ não possui.

Aqui parece que passamos do mínimo para que um quantificador seja lógico, nos termos que estamos usando aqui. Vamos então em busca da propriedade que possibilita a definição de Q^{Ma}. Em **1.3.e** a definição de um quantificador cardinal ou CARD apresentada segundo Peters e Westerst (2006, p. 212) em Keennan e Stavi 1986.

(1.3.e) Se $|A \cap B| = |A' \cap B'|$ então $Q_M(A, B)$ *sse* $Q_{M'}(A', B')$

Não estamos dizendo que Q^{Ma} seja CARD, mas simplesmente que depende da cardinalidade em sua definição de um modo que não dependem os quantificadores lógicos. Também não estamos propondo que os quantificadores lógicos são impassivos de uma abordagem via cardinalidade, a propósito é simples apresentar uma definição de $Q^{\forall}$ e $Q^{\exists}$ cardinalmente[50], o que pretendemos buscar é como essas definições se dão a um determinado nível estrutural. Com as propriedades apresentadas faremos uma breve digressão sobre o que significa um quantificador ser cardinal e não lógico sob nossa perspectiva.

Apresentamos na página 40 a visão de Mckeon/Tarski de que a cardinalidade dos subconjuntos do domínio seria a chave para neutralidade temática de quantificadores, ao passo que nomeava alguns como quantificadores cardinais que não aqueles quantificadores tradicionais. Procuramos uma razão por meio das propriedades dos quantificadores para

[50] $|A - B| = 0$ e $|A \cap B| > 0$ respectivamente.

classificar um quantificador como cardinal, junto com a busca pelos subconjuntos do domínio que interessam na classificação dos quantificadores, ou melhor numa propriedade comum aos quantificadores lógicos. Vimos que enquanto $Q^{\exists}$ é INT $Q^{\forall}$ não é. De fato podemos notar que o mínimo que precisamos para definir $Q^{\forall}$ é CONS, isso é, independentemente da cardinalidade de A e B,

$$Q^{\forall}(A, B) \ sse \ Q_{\forall}(A, A \cap B) \ sse \ A = A \cap B$$

acrescentando, para o caso de $Q^{\forall}$ ser aristotélico, que $A \neq \emptyset$. O quantificador Q^{Ma}, por outro lado, para além da dependência que tem com $A \cap B$, depende também da parte de A que não é B, isso é, do conjunto $A - B$ e especificamente da cardinalidade desses dois conjuntos. Q^{Ma} é basicamente uma relação entre os tamanhos da parte de A que é B e a parte de A que não é. $Q^{\exists}$ (ou um quantificador $Q^{\exists_n}$ para existe exatamente a quantidade n), $Q^{\forall}$ e Q^{Ma} dependem todos das cardinalidades dos subconjuntos dos domínios que quantifiquem, mas de modos diferentes. Q^{Ma} depende de uma relação entre essas cardinalidades. Mais a frente abordaremos como quantificadores que usam cardinalidade, como $Q^{\exists_n}$, mas que não fazem referência a essa cardinalidade, por exemplo, a partir de relações, mesmo tendo a propriedade CARD são lógicos (ou definíveis em uma lógica de primeira ordem) e por essa razão, em nossa opinião não deveriam ser chamados de quantificadores cardinais. Abaixo, nos arriscamos em uma definição que abarque os quantificadores que estamos chamando de cardinais sob essa perspectiva de relação entre o tamanho dos conjuntos em questão.

Sejam $A, B, A', B' \subseteq M$ e R uma relação de ordem linear, definimos um quantificador Q^M tipo $\langle 1, 1 \rangle$ como cardinal.

(1.3.f) Se $|A \cap B| \ R \ |A - B| = |A' \cap B'| \ R \ |A' - B'|$ então
$$Q_M(A, B) \ sse \ Q_{M'}(A', B')$$

Essa propriedade especifica o grupo de quantificadores que faz referência à relação entre os tamanhos dos conjuntos em questão e deixa de tratar alguns outros quantificadores que fazem referência ao tamanho de seus conjuntos, mas com uma certa associação a um conjunto fixado como o quantificador para finitude ou infinitude.

1.4 Definibilidade, expressabilidade e logicidade de quantificadores.

A análise das propriedades dos quantificadores talvez não tenha nos oferecido respostas precisas sobre como os quantificadores são diferentes entre si. Isso é, um quan-

tificador é uma operação que desejamos que seja igual nos distintos domínios[51] e que seja distinta de outras operações da mesma categoria, por assim dizer. Já falamos de ISOM como critério de logicidade na seção anterior, mas também que algo mais do que ISOM é necessário para a definição de certos quantificadores, como Q^{Ma}. Uma classificação para esse quantificador parece requerer que adaptemos nossos critérios para logicidade, mediante uma justificativa razoável, ou mesmo aceitar certos quantificadores como não lógicos apesar de ISOM. Precisamos aqui tratar de alguns níveis de classificação baseados em certos pressupostos.

Imagine que alguém defenda sob sua perspectiva que a Lógica Clássica de Primeira ordem com ou sem identidade é um padrão confiável para que possamos dizer o que é Lógica[52]. Nesse caso, critérios técnicos podem trazer ainda duas questões sobre a logicidade de um quantificador. Primeiro, este tal quantificador é definível em uma lógica (de primeira ordem)? E segundo, como a definição de tal quantificador nesta lógica interfere no funcionamento desta lógica como um todo? O modo direto de responder o primeiro questionamento (modelo-teoreticamente falando) é via definibilidade do quantificador. Vamos abrir um espaço para definições necessárias para entender o que é definibilidade.

Queremos, antes de mais nada, saber se um quantificador é definível em Lógica Clássica de Primeira Ordem (que por vezes chamaremos de Elementar). Bem, uma lógica pode ser definida, modelo teoreticamente falando, como uma família de linguagens que diferem apenas sobre suas assinaturas (HODGES et al., 1997, p. 26). Uma assinatura (por vezes vocabulário em nosso texto), segundo Hodges et al. (1997, p. 4) é a especificação de um conjunto de constantes, dos símbolos relacionais e dos funcionais n-ários para cada $n > 0$ de uma estrutura $\mathfrak{A}$. Uma vez que uma assinatura, digamos L, é definida em função de uma estrutura $\mathfrak{A}$, dizemos que uma estrutura com uma assinatura é uma $L - estrutura$ de $\mathfrak{A}$. Uma $L - estrutura$ centrada na teoria dos modelos de primeira ordem já seria uma linguagem, esse é o caso do clássico Chang e Keisler (1990, p. 18), Hodges et al. (1997, p. 23), por outro lado, diz que uma $L - estrutura$ acrescida de um conjunto de constantes lógicas e símbolos de pontuação e regras de construção de sentenças é que seria uma linguagem. A distinção faz diferença no modo como uma lógica passa a ser definida, em cada caso, enquanto a definição de Hodges nos ajuda mais ao apresentar famílias de linguagens como lógicas distintas, uma definição centrada em linguagens de primeira ordem nos dá somente o suficiente para definir uma lógica de primeira ordem. Seja L uma

[51] Há quem deseje isso para todos os domínios e há quem negue que isso seja necessário, como já comentamos na introdução com respeito à visão de Barwise e Cooper (1981).

[52] Aqui a proposta é de um experimento em pensamento, em todo caso precisamos dizer que sabemos que não é nem de longe desprezível o background de propostas dessa espécie, como nos mostram Barwise, Feferman e Feferman (2017, p. 5) “To give ourselves a foil, let us call the view that attempts to define logic as the logic implicit in the "logical constants"the first-order thesis. (Among the numerous past and present adherents to this thesis there is a slight disagreement as to whether identity should be counted as a "logical constant".) Another way to state this view is to claim that logic is first-order logic, so that anything that cannot be defined in first-order logic is outside the domain of logic. barwise e feferman”

assinatura, ω[53] um conjunto finito de qualquer tamanho, dizemos que $L_{\omega\omega}$ é uma linguagem e que os subscritos indicam o comprimento/complexidade máximo de suas sentenças e o número máximo de quantificadores usados em cada sentença respectivamente. Tomada uma linguagem $L_{\omega\omega}$ qualquer, chamamos cada sentença construída de acordo com suas regras uma $L-$*sentença*. Explicando melhor o que foi dito no início do parágrafo temos que, uma lógica é a família de todas as linguagens $L_{\omega\omega}$ que respeitam os critérios estabelecidos para a formação de $L_{\omega\omega}$[54] independente de sua assinatura. Essa nossa definição, em realidade já é um tanto restritiva, posto que o índice ω é a representação do conjunto de sentenças (possíveis) em nossas linguagens e, por consequência, as lógicas tratadas aqui são finitárias. Se tratarmos de algo distinto disso indicaremos. Uma linguagem infinitária é indicada por $L_{\infty\omega}$ quando pode ter em suas sentenças um número finito de quantificadores, por $L_{\infty\infty}$ quando pode ter um número infinito, por $L_{\infty\omega_1}$ quando este infinito é enumerável e por $L_{\infty 0}$ quando suas sentenças não têm qualquer quantificador. O mesmo vale para as finitárias.

1.4.1 Definição

Os critérios para a formação de uma linguagem, mencionados acima, estabelecem como cada $L-$*sentença* é sintaticamente formada e qual é a expressão semântica de cada uma delas. Se retornarmos ao problema sobre se um quantificador é definível em primeira ordem e olharmos para ela de modo mais detalhado, vamos perguntar precisamente se: um quantificador Q pode ser incluído em uma linguagem $L_{\omega\omega}$ sobre uma estrutura $\mathfrak{A}$ e com uma regra sintática ser capaz de gerar sentenças, digamos, ψ. Além disso, com uma expressão semântica de Q seremos capazes de dizer em que condições ψ é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Temos aqui algum recurso para dizer quando um quantificador pode ser definido em uma lógica. Vamos restringir nosso exemplo de definição a quantificadores de tipo $\langle 1,1\rangle$, estes pelos quais já demonstramos um interesse especial.

(1.4.1.a) Seja Q um quantificador de tipo $\langle 1,1\rangle$ e uma lógica $L_{\omega\omega}$, Q é definível em $L_{\omega\omega}$ sse existe uma $L-$*sentença* ψ, contendo dois símbolos de predicados unários, tal que, para todo M e todos $A, B \subseteq M$, $Q_M(A,B)$ sse $(M,A,B) \models \psi$.

M, A e B representam os conjuntos indispensáveis em um modelo para que a definição possa se realizar, por isso temos (M,A,B) no lugar de $\mathfrak{A}$ ou $\mathbf{M}$. Ao olhar para

[53] Na notação usada por Hodges ω_0, muitas vezes usado para representar uma cadinalidade finita, é substituído simplesmente por ω e ω_1 é a cardinalidade de um conjunto enumerável. Para a cardinalidade de um infinito sem restrição, isto é, quando não há diferença ente um infinito enumerável ou não enumerável o autor usa o símbolo do infinito.

[54] Usaremo aqui essa notação, corriqueiramente utilizada para lógica clássica, para uma lógica qualquer inicialmente.

o lado esquerdo dessa bimplicação, vemos que precisamos de uma relação entre dois conjuntos (A, B). Para além disso já é condição que A e B sejam previamente definidos, como predicados unários, isto é, que sejam extensionais. Lembre que estamos definindo um quantificador $\langle 1, 1\rangle$. No lado direito, precisamos somente de uma sentença ψ que é verdadeira no modelo com os conjuntos (M, A, B) tais que M é o domínio e $A, B \subseteq M$. Bem, por fim, em função da equivalência, temos que sempre que essa relação se realiza ψ é verdadeira no modelo em questão que por ser escolhido arbitrariamente é um qualquer.

Vejamos alguns exemplos. Apresentamos no primeiro parágrafo de **1.3** que era possível definir um quantificador $Q^{\forall}$ que fosse do tipo $\langle 1, 1\rangle$ da seguinte forma:

$$Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x)) \ sse \ \phi(x)^{\mathbf{M},x} \subseteq \psi(x)^{\mathbf{M},x}.$$

A noção de definição lá era muito vaga, mas agora pode receber um tratamento mais preciso. O que dissemos com a definição acima foi basicamente que em qualquer linguagem para um modelo de domínio M e com A e B[55] como subconjuntos do domínio, se $Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x))$ for verdadeira neste modelo existe uma relação de segunda ordem entre A e B, $Q_{\forall}(A, B)$ e essa relação é igual a $A \subseteq B$, assim

$$Q_{\forall}(A, B) = \phi(x)^{\mathbf{M},x} \subseteq \psi(x)^{\mathbf{M},x} \ sse \ (M, A, B) \models Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x)).$$

Veja que a noção de definição de um termo, no caso de um quantificador, nos dá uma resposta sobre como uma relação entre conjuntos se comporta em um modelo, em uma linguagem, em um sistema. Não há aí uma resposta para se essa relação é boa o suficiente para contemplar o significado de um termo da linguagem natural, ou mesmo de uma outra linguagem artificial. Por exemplo, a noção de definição não nos diz nada sobre a similaridade dos significados de $\forall$ e $Q^{\forall}$. Essa similaridade de significados tem mais relação com sinonímia do que com o que é necessário que exista no modelo para que uma determinada fórmula com o quantificador seja verdadeiro ou falso. Como não estamos considerando duas linguagens absolutamente disjuntas, uma com o quantificador $\forall$ e outra com $Q^{\forall}$, podemos pensar que numa mesma linguagem a substituição de um pelo outro não causa prejuízo, melhor dizendo, que fórmulas com os quantificadores são equivalentes em todos os modelos. Para demonstrar isso é suficiente mostrar duas coisas, primeiro que todas as fórmulas ϕ com um quantificador $\forall$ para todo modelo $\mathbf{M}$ têm uma fórmula ψ com o quantificador $Q^{\forall}$ e $\mathbf{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$ e segundo que toda fórmula ψ com um quantificador $Q^{\forall}$ para todo modelo $\mathbf{M}$ têm uma fórmula ϕ com o quantificador $\forall$ e $\mathbf{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$. Apresentamos um esquema desta prova no apêndice B. Juntando os dois podemos dizer que os quantificadores, então, são interdefiniveis, isso porque na prática, se eles são equivalentes, então a relação usada na definição de um pode ser usada na definição do outro.

[55] Com A e B respectivamente sendo a extensão de $\phi(x)$ e $\psi(x)$, isto é, $\phi(x)^{\mathbf{M},x} = A$ e $\psi(x)^{\mathbf{M},x} = B$

1.4.2 Expressão

Nossa segunda questão, "como a definição de tal quantificador interfere nesta lógica?", por outro lado, exige ao menos uma ideia sobre o que caracteriza uma lógica. Aqui, de forma bem geral, podemos dizer que um quantificador descaracteriza uma lógica (linguagem) L quando a mera inclusão de Q gera uma nova lógica (linguagem) $L(Q)$ com pelo menos uma nova sentença ψ não definível [56] em L. Essa segunda noção, um tanto quanto mais ampla do que a primeira, a de definição, diz algo sobre as lógicas (linguagens) em questão e por isso mais do que uma definição de um quantificador, fala sobre a força da linguagem em expressar sentenças com este quantificador em relação a uma outra linguagem. À propriedade de uma linguagem em expressar mais sentenças que outra chamamos de (maior) força expressiva. Assim podemos definir a relação de expressividade entre linguagens L e L'

Uma linguagem qualquer é modificada para uma outra expandida ou reduzida pela inclusão/exclusão de símbolos de relação, de função e de constantes, contando entre elas quantificadores. Isso é, uma linguagem L^+ de uma estrutura $\mathfrak{A}$ pode ser modificada para uma linguagem L^- para a mesma estrutura, sem qualquer modificação no domínio da estrutura, mas com pelo menos um símbolo a menos, para funções, relações ou constantes (e o mesmo se dá para a inclusão).

Da noção de modificação de uma linguagem pela inclusão ou exclusão de uma constante lógica, e no nosso caso específico, um quantificador, introduzimos a ideia de extensão de uma lógica. Se L é uma linguagem qualquer e Q um quantificador, então $L(Q)$ é a extensão de L pela inclusão de Q e as regras sintáticas e semânticas relativas a Q. Seja L' a nova linguagem resultante da inclusão de Q a L, dizemos por $L \leqq L'$ que L' é uma extensão de L, se e somente se para cada sentença ϕ em L existe uma equivalente em L'. Se não houver simetria, isto é, $L' \nleqq L$, então dizemos que L' é uma extensão mais expressiva que L, ou $L < L'$. Isso é, existe uma sentença ϕ em L' não é interdefinível com/por nenhuma sentença de L. Logo, existe uma sentença de L' não definível em L.

Claro que o termo "caracterização" é relativo ao fragmento da linguagem em questão que usa o quantificador. Assim, é possível entender esse nosso (des)caracteriza como (des)caracteriza com relação às sentenças que L pode expressar usando Q. Dadas as definições, temos como pensar melhor a segunda questão sobre como a definição de um quantificador em uma lógica interfere nesta lógica, porque esta interferência agora será entendida no sentido de caracterização ou descaracterização de uma linguagem. Uma vez que o aumento de expressividade dependente da modificação da linguagem, provar que uma linguagem $L < L'$, em que L' é $L(Q)$ depende de duas coisas, provar que todas as sentenças

[56] Ou simplesmente não equivalente a nenhuma sentença em L no sentido exemplificado com $\forall$ e $Q^{\forall}$ de que todos os modelos que tornem a sentença ψ verdadeira nas estruturas para L também tornam as de $L(Q)$

em L tem um equivalente em L' e apresentar uma sentença ψ de L' que não seja equivalente a qualquer sentença em L, caso essa sentença tenha Q, o quantificador descaracteriza L. Abaixo uma linha que representa a força expressiva de linguagens modificadas pela inclusão de quantificadores apresentada em Westerståhl (2007, 240) sendo L a lógica elementar (lógica clássica) e $L(Q^n)$[57] a lógica clássica acrescida de um novo quantificador.

$$L < L(\mathbf{Q}^i) < L(\mathbf{Q}^I) < L(\mathbf{Q}^{more})^{58}$$

Observe que Q^i é o quantificador $\langle 1 \rangle$ que apresentamos na página 33 de forma que a sentença $Q^i x\phi(x)$ significa que a extensão de ϕ é um conjunto infinito. I e *more* são quantificadores tipo $\langle 1, 1 \rangle$ para um domínio M definidos abaixo.

$$\mathbf{Q}^I = \{\langle A, B \rangle \in M^2 : |A| = |B|\}$$
$$\mathbf{Q}^{more} = \{\langle A, B \rangle \in M^2 : |A| > |B|\}$$

Como já dissemos, provar que uma linguagem é mais expressiva do que a outra depende de duas coisas: (i) Provar que cada sentença que ocorra em L pode ser expressa em L'. Parece ser a parte mais complicada, uma vez que envolve uma generalização em uma linguagem que pode construir infinitas combinações de sentenças. Mas em fato é a mais simples. Uma vez que as sentenças são construídas recursivamente dentro das linguagens, por regras sintáticas bem controladas, podemos dizer que caso exista uma sentença na linguagem L equivalente às sentenças em L' tendo o novo quantificador como operador principal, então sempre conseguiremos apresentar um equivalente de uma sentença com Q de L' sem Q em L. O que, por outro lado, parece mais simples, (ii) encontrar uma sentença em L' que não seja equivalente a nenhuma de L, é na verdade bem complicado. Vamos ver um exemplo para (i) com base na linha expressiva apresentada acima.

Levando em consideração a relação $L(Q^i) < L(Q^I)$ digamos que $Q^i x\phi(x)$ é uma sentença de $L(Q^i)$ e $\phi(x)$ uma fórmula em L com no máximo uma variável livre interpretada como a extensão de ϕ é infinita. Westerståhl (2007, 240) apresenta a seguinte sentença em $L(Q^I)$ equivalente a $Q^i x\phi(x)$.

$$\exists y(\phi(y) \wedge Q^I(\phi(x), \phi(x) \wedge x \neq y))$$

O que a sentença acima quer dizer é que existe um elemento no conjunto que é a extensão de ϕ e que essa extensão se mantém com a cardinalidade igual se eu retirar esse

[57] Sendo n um índice que indica um quantificador.

[58] Na linha de expressividade apresentada por Westerståhl há ainda, na ponta mais à direita, o quantificador conhecido como quantificador de *Henkin* **H** para Westerståhl e Q^H na notação que escolhemos aqui. Um quantificador mais complexo que inaugura quantificadores de um tipo específico chamados *branch quantfiers*, como aqui não trataremos essas quantificações, omitimos o quantificador de Henkin.

elemento. Isso é o suficiente para expressar que um conjunto é infinito. Como desejamos um mero exemplo o que foi dito nos parece suficiente para o caso de (i), para (ii), por outro lado teríamos que encontrar uma sentença com Q^I não equivalente a nenhuma sentença em $L(Q^i)$. Esse processo é mais complicado porque antes de mais nada, Q^I não precisa figurar como operador principal na sentença em questão, isso é, nem temos por onde começar, um "ponto fixo" que seja na linguagem L ou em L'. Além disso, se tivéssemos uma sentença em mãos, digamos $Q^I x(\phi(x), \psi(x))$ e tentássemos provar que ela não é equivalente a nenhuma em $L(Q^i)$, ao provar para cada uma das formas esquemáticas de sentenças[59] não teríamos demonstrado isso para todas as sentenças de $L(Q^i)$, mas antes para todas as formas possíveis de sentenças. Assim, essa parte da prova se torna bem mais complexa[60]. Provas neste sentido são mais comumente realizadas indiretamente, isto é, tomando uma linguagem L pelas condições que a caracteriza como um conjunto de famílias, veremos primeiro o que há em comum entre todos os elementos da família L e depois dizemos que uma linguagem $L^{+/-}$ sem aquelas características é uma modificação de L. Mas já dissemos acima que uma família de linguagens que varia somente sobre sua assinatura é uma lógica, então dito de outro modo, o que pretendemos, numa prova indireta de que $L < L'$ é saber se L' tem algo (como um quantificador) que descaracterize a lógica L.

Usamos aqui, de forma vaga, ao menos três vezes o termo "(des)caracterizar". No primeiro momento dissemos que um quantificador Q descaracteriza L se sua inclusão gera uma linguagem L'[61] com ao menos uma sentença não definível em L. Debatemos há pouco que essa demonstração é complexa. Em seguida, falamos em caracterização de uma linguagem pela sua força expressiva. É fácil perceber que estávamos falando do mesmo, mas desta vez a noção de definição já não era mais evidente. Por fim, estamos falando de caracterização de uma lógica. Nos parece que fizemos uma escalada em três níveis, no do vocabulário, passando pelo da linguagem e chegando ao lógico. Destacamos que não existe uma razão que não a explanatória dessa escalada. Ao tratar da caracterização de uma lógica ao menos temos um abrigo na literatura, pois podemos dizer quais são as condições tomadas para a caracterização da Lógica Elementar (clássica de primeira ordem) desde a prova de Lindstöm em 1969 [62]. Para explanar, de modo direto e grosseiro, o enunciado do conhecido teorema de Lindström, que caracteriza a lógica clássica de primeira ordem, usaremos uma parte do esquema usado por Peters e Westerst (2006, p. 72, 73) e uma apresentação similar feita em Westerståhl (2007, p. 240, 241).

Quatro propriedades, derivadas de famosos teoremas, devem ser introduzidas e

[59] $(\alpha \wedge \beta)$, $\neg\alpha$, $\forall x(\alpha)$, $Q^i x(\alpha)$, etc.

[60] Em todo caso, com duas estratégias distintas, isso já foi feito para o caso de Q^{Ma}. As provas podem ser encontradas em (BARWISE; COOPER, 1981), levando em consideração modelos infinitos e em (SZYMANIK, 2016, 3.1) com EF-games.

[61] $L' = L(Q)$

[62] *On extensions of elementary logic*, in *Theoria*, 35 1 - 11.

pensadas como propriedades de lógicas antes da apresentação da caracterização que queremos dar aqui.

- *Compacidade*: Positivamente, se existe um modelo para cada subconjunto de um conjunto Φ de sentenças, existe um modelo para Φ, seja ele de qualquer cardinalidade. Negativamente, se nenhum modelo torna todos os elementos de um conjunto Φ de sentenças verdadeiro, então existe um subconjunto finito Ψ de Φ tal que nenhum modelo torna todas as sentenças de Ψ verdadeiras.
- *Propriedade de Tarski*: Se uma sentença ϕ é verdadeira em um modelo infinito enumerável, então ϕ também é verdadeira em um modelo inumerável.
- *Completude*: O seu conjunto de sentenças válidas é recusivamente enumerável.
- *Propriedade de Löwenheim*: Se uma sentença ϕ tem um modelo infinito, então ϕ tem um modelo enumerável.

O que o teorema de Lindstöm estabelece é que uma lógica de primeira ordem é caracterizada por algumas destas propriedades em combinação. Chamemos essas combinações de a, b e c.

A primeira dessas combinações (a) nos diz que qualquer linguagem L que seja compacta (tenha compacidade) e além disso tenha a propriedade de Löwenheim é uma lógica elementar. Para exemplificar Westerståhl (2007, 241) apresenta um esquema que nos dá um conjunto de sentenças de uma linguagem $L(Q^i)$. Para nós, serve como exemplo de descaracterização de uma lógica.

$$\{\neg Q^i x(x = x)\} \cup \{\exists_{\geq n} x(x = x) : n = 1, 2, 3...\}$$

O esquema nos dá um conjunto com a união das extensões das sentenças que dizem o seguinte: $\neg Q^i x(x = x)$ para qualquer número x o conjunto com todos os números com cardinalidade x é finito, posto ainda que cada x instancia uma sentença nesse conjunto no esquema de fórmula. E o esquema $\exists_{\geq n} x(x = x)$[63] assevera que para qualquer número x existe um conjunto de cardinalidade maior ou igual[64]. Notemos que esse conjunto de sentenças é verdadeiro em conjunto (lados direito e esquerdo da união) caso instanciemos x como o número 1 (ou como 0). Leve em consideração qualquer número k tal que $|k| < |\mathbb{N}|$, se $x = k$, então os dois lados da união ainda são verdadeiros, uma vez que k é finito. Note, se cada sentença em que substitua x por k é verdadeira, então também é verdadeira a união

[63] Nesse caso $\exists$ não é o quantificador existencial, mas um quantificador definido por Westerståhl (2007, 235) para cardinalidade de conjuntos $\exists_{\geq n} = \{X \subseteq M : |X| \geq n\}$.

[64] Bem, este é o exemplo de Westernståhl, nos parece que faria mais sentido para o exemplo em particular que o quantificador fosse definido para um x estritamente maior, mas levando em consideração que x pode ter a cardinalidade igual aos naturais perceba que a definição é correta.

de todas essas sentenças dessa categoria, isso é, $\{\neg Q^i x(x = x)\}$ e $\{\exists_{\geq n} x(x = x)\}$ tomadas como conjuntos. Agora suponha que $x = \mathbb{N}$, aqui $\exists_{\geq n} x(x = x)$ permanece verdadeiro, mas $\neg Q^i x(x = x)$ é obviamente falsa.

Em resumo, se um número n tem cardinalidade finita, então todas as sentenças que obtemos pela substituição de x por n no esquema acima são verdadeiras e a sua união também. Por outro lado, se n tem cardinalidade pelo menos igual aos naturais, então, embora todas as sentenças do esquema sejam verdadeiras individualmente sua união não será e isso demonstra que uma linguagem que expresse o infinito não é compacta (ou não tem compassividade). Por fim, enquanto L como lógica elementar é, pelas pelas demonstrações clássicas, compacta, $L(Q^i)$ não é. Assim podemos dizer que a inclusão de Q^i em L não nos permite dizer que $L(Q^i)$ é a lógica clássica de acordo com a combinação ***(a)***.

As combinações b e c dependem de uma propriedade extra das linguagens, a *relativização*. É importante sair um pouco do debate para destacar que essa é uma propriedade muito importante na quantificação em linguagem natural. De fato, existem debates sobre se é possível alguma quantificação irrestrita, isso é, que seja relativa a um domínio irrestrito. De modo geral dizemos que uma linguagem L relativiza se "para toda sentença ϕ de L e todo símbolo de predicado unário P (que não apareça em ϕ), é possível encontrar uma nova sentença em L dizendo sobre o universo restrito a P o mesmo que ϕ diz sobre o universo inteiro" (PETERS; WESTERST, 2006, p. 73). Uma vez que o assunto veio à baila, e um exemplo nos cairia bem, aproveitaremos esse espaço para uma definição precisa de relativização para quantificadores generalizados.

Seja Q um quantificador generalizado arbitrário de tipo semântico $\langle n_1, ..., n_k \rangle$ o quantificador relativo de Q, ao qual chamamos de Q^{rel} tem o tipo $\langle 1, n_1, ..., n_k \rangle$ e é definido da seguinte forma para um conjunto A tal que $A \subseteq M$ e $R_i \subseteq M^{n_i}$, $1 \leq i \leq k$, como segue:

1.4.2.a $Q^{rel}_M(A, R_1, ..., R_k)$ sse $Q_A(R_1 \cap A^{n_1}, ..., R_k \cap A^{n_k})$

Para o caso mais simples, onde Q é de tipo $\langle 1 \rangle$ temos:

$$Q^{Rel}_M(A, B) \text{ sse } Q_A(A \cap B)$$

O que a relativização quer dizer é simples e não nos traz inovação. Já apresentamos alguns casos aqui onde ela ocorreu. Veja por exemplo que $Q^{\forall}$ é a relativização de $\forall$ e a linguagem de primeira ordem a linguagem que a relativiza. A quantificação universal de tipo $\langle 1 \rangle$ que poderíamos representar com uma sentença da forma $\forall x \psi(x)$ é uma quantificação onde o universo é a totalidade dos objetos do mundo na abordagem fregeana. Pode-se alegar, no entanto, que sempre que estamos supondo quantificar sobre um domínio irrestrito temos um contexto pressuposto. Vejamos, se ψ é o predicado "x é uma criança" que tem

como extensão o conjunto B, dizer que "todos são crianças" é, antes de mais nada, se referir a um subconjunto da totalidade de objetos do mundo. Mesmo que a sentença "todos são crianças" fosse usada no sentido figurado, o que já especificaria um contexto, a saber, o contexto onde "criança" não significa uma classificação etária, ela não se aplicaria a objetos inanimados, por exemplo. Sigamos, se sempre que se afirma ψ, de extensão B temos algo implícito que acompanha tal conjunto, então estamos na realidade falando em um conjunto B mediante uma condição qualquer, digamos, descrita por um conjunto A, assim um conjunto $A \cap B$ é o que está em jogo quando pensamos na extensão de ψ. Digamos que o conjunto A seja a extensão de um predicado ϕ, então $\forall x \psi(x)$ e $\forall x(\phi(x) \to \psi(x))$[65] são equivalentes e o segundo é a relativização do primeiro. A relativização de um quantificador generalizado de tipo $\langle 1 \rangle$, transforma esse quantificador em um de tipo semântico $\langle 1, 1 \rangle$. Apenas para encerrar o tópico relativização de quantificadores com mais um exemplo deixamos aqui o fato de que o quantificador Q^{Ma} é a relativização de Q^R.

Agora podemos falar das duas outras combinações de propriedades que caracterizam a lógica elementar. Dada uma linguagem L que tenha a propriedade da relativização descrita acima, caso L tenha a propriedade de Löwenheim e a propriedade de Tarski dizemos que ela á uma lógica elementar de acordo com a combinação **(b)**. Para observar o exemplo de $L(Q^i)$ Westerståhl (2007, p. 241) apresenta o esquema de sentença (chamemos σ):

$$\sigma\textbf{:}\ \phi \wedge Q^{\forall_1} x \neg Q^i y(y < x)$$

Onde ϕ seria a sentença da lógica elementar dizendo que $<$ é um "ordenamento discreto linear com um primeiro elemento" [66]. O quantificador $Q^{\forall_1}$ é de tipo $\langle 1 \rangle$ e é definível em primeira ordem, mas não é um dos quantificadores que tratamos até aqui. Então, de forma breve, $Q_{\forall_1}$ é a função que associa o conjunto a que o quantificador se aplica ao conjunto $\{M\}$, sendo M o domínio de discurso. A parte de σ com quantificadores não lógicos de primeira ordem, isso é, $Q^{\forall_1} x \neg Q^i y(y < x)$ diz que qualquer (conjunto finito) subconjunto finito do domínio é menor do que o domínio. Westernståhl diz que a sentença σ caracteriza um ordenamento nos números naturais $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ e que qualquer modelo $\langle M, R \rangle$ de σ é isomórfico a $\langle \mathbb{N}, < \rangle$. Assim, o autor conclui que $L(Q^i)$ não tem a *propriedade de Tarski*, uma vez que todos os modelos de σ seriam modelos enumeráveis. Dessa forma $L(Q^i)$ não tem a combinação de propriedades ***(b)***.

Por fim a combinação ***(c)*** que, mais uma vez, é uma junção da propriedade de Löwenheim com uma outra, desta vez a completude. A Completude pode ser descrita de mais de uma forma dependendo do interesse que se tenha e da perspectiva que se observe. O sentido do termo "completo" que mais condiz com as origens da propriedade,

[65] Equivalente a $Q^{\forall} x(\phi(x), \psi(x))$

[66] Um exemplo de sentença que expressa o que ϕ expressa é $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z) \wedge \forall x(x = x \to \neg(x < x)) \wedge \forall x \forall y((x < y \vee y < x) \wedge (x < y \to \neg(y < x))) \wedge \forall x \exists y \forall z(x < z \to ((y < z \wedge x < y) \vee x = y)) \wedge \exists x \forall y(\neg(x = y) \to x < y)$

quando demonstrada para a lógica de primeira ordem por Kurt Gödel em 1929, é: Tudo que é tomado como verdadeiro a partir de uma definição semântica nessa lógica também é demonstrável sintaticamente. Westerståhl diz que se tivermos um modelo que seja um ordenamento sobre os naturais $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ como aquele que caracteriza σ e acrescentarmos definições de adição (+) e multiplicação (.), além disso as constantes "0" e "1", sendo 0 o menor elemento e "$x + 1$" o sucessor imediato de x é possível obter uma sentença, digamos "θ"[67] que caracteriza um modelo standard para a aritmética $\mathbf{N} = \langle \mathbb{N}, <, +, ., 0, 1 \rangle$. $\mathbf{N}$ é uma expansão no vocabulário de $L(Q^i)$ e para qualquer sentença de ψ de $L(Q^i)$ neste novo vocabulário:

$$\mathbf{N} \models \psi \ sse \ \theta \rightarrow \psi \text{ é válido.}$$

Note que isso vale especialmente porque estamos supondo a relativização em nossa linguagem. Westernståhl então se vale de um resultado ainda mais famoso de Gödel para afirmar que "uma vez que o conjunto de sentenças aritméticas que são verdadeiras não é recursivamente enumerável, assim $L(Q^i)$ não é completa" (WESTERSTåHL, 2007, p. 241). Para nossos objetivos, não tem a combinação de propriedades ***(c)***.

Nosso objetivo inicial era dizer como podemos saber se entre duas linguagens L e L' uma é mais expressiva que outra. Primeiro dissemos que era necessário apresentar prova de que a nova linguagem L' era ao menos tão expressiva quanto L e que isso era feito provando que cada sentença ϕ em L tem uma equivalente em L', nosso exemplo foi para o caso $(L(Q^i) < L(Q^I))$, mas como as linguagens de L e $L(Q^i)$ são as mesmas exceto por Q^i é óbvio que $L(Q^i)$ é pelo menos tão expressiva quanto a lógica clássica L. Depois determinamos que dizer que uma linguagem era mais expressiva que outra dependia de provar que ao menos uma sentença em L' não tem qualquer equivalente em L e falamos sobre como isso é complexo. Em consequência, apresentamos uma maneira indireta de fazer isso, a partir da caracterização de uma lógica como sendo as propriedades que a linguagem desta lógica, tomada como conjunto, tem. Temos de tudo isso que o acréscimo de Q^i a L nos fornece é uma linguagem diferente de L, mas também capaz de expressar tudo que L expressa. Sendo assim, uma linguagem com algo a mais. Este algo a mais só pode ser o conjunto das novas sentenças, que o novo quantificador é capaz de expressar e que não seriam expressáveis em L.

1.4.3 Logicidade

Toda a subseção anterior é exemplo de como as propriedades de uma família de linguagens, uma lógica pela definição de Hodges, pode mudar com a inclusão de um novo quantificador. Interessante notar que novas linguagens, mais expressivas que outras, perdem

[67] Pense em uma conjunção dos axiomas de Peano, por exemplo.

certas características gerais e absolutamente desejáveis o qual é o caso da completude, para ficar em somente um exemplo. Começamos com uma perspectiva ilustrativa que respeita o argumento de alguém que toma a Lógica Clássica de Primeira Ordem (ou a Lógica Elementar) por paradigma lógico. Se apenas a Lógica Elementar é uma lógica, a caracterização de Lindström deveria ser suficiente e assim teríamos a classificação de quantificadores que desejamos dar aqui apresentada por uma dualidade simplista: existem quantificadores Lógicos e Não-Lógicos. Felizmente a intuição sobre lógica é bem anterior à teoria abstrata de modelos e a caracterização de "lógica" como Lógica Elementar não passa de um experimento em pensamento. A expressão "Isso é lógico!", que pode querer dizer "qualquer um notaria" ou "acima de qualquer suspeita", muitas vezes é utilizada a parte de qualquer consenso e apenas como forma de exercer alguma autoridade intelectual. Nem saímos aqui do padrão clássico, isso é, não propusemos debates sobre lógicas intuicionistas, paraconsistentes, paracompletas, relevantes, quânticas e assim por diante, mas já temos um claro exemplo de quando o que os quantificadores significam não é consensual. A saber, na ocasião em que falamos da conservatividade do quantificador $Q^{\forall}$ de tipo $\langle 1, 1\rangle$ (na página 51) apresentamos a possibilidade de interpretá-lo como aristotélico, mudando o significado do quantificador para um que ao dizer "Todos A's são B's" também afirma "Existem A's que são B's". Pois bem, tomar por "lógico" o que é absolutamente consensual, mesmo estando frente-a-frente com controvérsias de todos os tipos, parece uma postura imatura. Por isso, sempre cabe essa avaliação, que de certa forma, acaba sendo sobre "porque o óbvio é óbvio".

Aqui no lugar de debater as vantagens do quantificador moderno sobre o aristotélico ou a logicidade de um quantificador qualquer vamos nos deter um pouco sobre a própria tentativa de categorizar a Lógica. Ainda que uma definição nos dê uma resposta seca e direta como "lógica é uma família de linguagens variáveis somente sobre sua signatura" podemos nos perguntar o que mais fundamentalmente "não deve variar". Não faltam na literatura excelentes trabalhos com estudos sobre logicidade. Aqui escolhemos acompanhar um que estranhamente não se propõe a definir logicidade, mas ao contrário, defende que definições desta categoria tendem a ser circulares. Estamos nos referindo a um trabalho de Johan van Benthem (BENTHEM, 2002) em uma coletânea em homenagem a Solomon Feferman, autor que, diferentemente de van Benthem, tem uma proposta para os "limites da Lógica". Vejamos de modo direto a perspectiva de Feferman.

Peters e Westerst (2006, p. 329) diz que em um trabalho de 1999, Feferman, que por sua vez também homenageava um lógico famoso, George Boolos que havia falecido recentemente, apresenta sua posição sobre a logicidade de "operações" que não mudam em diferentes domínios, mesmo que estes domínios tenham distintas cardinalidades. A proposta antes de qualquer coisa está delimitada a um critério de logicidade para quantificadores monádicos nos termos que estamos usando aqui. Lembremos que a *relativização* (**1.4.2.a**) é um processo que transforma quantificadores lógicos monádicos de tipo $\langle 1\rangle$ em novos

quantificadores de tipo $\langle 1, 1\rangle$, os mantém como monádicos e por isso a proposta de Feferman, ao contrário do que a delimitação possa fazer pensar, é bem ampla. Observe que a abrangência da investigação de Feferman é inclusive maior do que aquela feita por quem pretende logicidade como fechamento sobre isomorfismo. Isso é, quando dizemos que neutralidade temática é a característica de um operador que é invariável sobre modelos isomórficos estamos impregnando estes quantificadores de conteúdo cardinal, já que modelos isomórficos têm a mesma cardinalidade. A ideia de Feferman é basicamente de que no lugar de adotar isomorfismo entre duas estruturas como critério de logicidade, devemos antes pensar em um homomorfismo. Um homomorfismo é um isomorfismo que não é obrigatoriamente bijetor, $(1 - 1)$ como vinhamos dizendo. A consequência imediata disso é a perda da identidade como um operador lógico (PETERS; WESTERST, 2006, p. 329, tradução nossa) "ISOM impõe neutralidade temática, enquanto HOM em adição impõe neutralidade numérica: não apenas a extensão real das expressões de predicado é considerada irrelevante para a lógica, mas também o número de objetos nessas extensões[68]". Mas esta não é uma consequência impensada e não desejável para Feferman. O próprio autor dá uma demonstração de que isso ocorre no teorema 6 (FEFERMAN et al., 1999, p. 20, tradução nossa) enunciado por ele assim: "As operações definíveis a partir das operações do cálculo de predicado CP sem igualdade são exatamente aquelas definíveis a partir de operações invariantes ao homomorfismo de tipo monádico[69]". Peters e Westerst (2006, p. 329, tradução nossa) enunciam de acordo com os termos que usamos neste trabalho da seguinte maneira: "Os quantificadores monádicos (generalizados) satisfazendo HOM são exatamente aqueles definíveis primeira ordem sem identidade[70]".

Não apresentamos os dois enunciados por redundância, mas para dizer que, ainda que *operações monádicas definidas a partir de invariância sobre homomorfismo* e *quantificadores monádicos satisfazendo HOM* sejam "a mesma coisa", nossa perspectiva é a de que não faz mais sentido chamar operações absolutamente independentes de cardinalidade de "quantificadores". Um fato interessante sobre este trabalho é que Feferman atribui justamente à teoria da quantificação generalizada para a linguagem natural o seu exemplo preferido de falha na aplicação de ISOM como critério de logicidade (FEFERMAN et al., 1999, p. 24, 25). O argumento é que enquanto os quantificadores com a propriedade EXT (**1.3.b** página 46) que são domínio independentes (e portanto não ISOM) são aparentemente Universais da linguagem, algo próximo ao que se espera de um operador lógico, quantificadores de tipo $\langle 1\rangle$, domínio dependentes não são. Observe como exemplo "Todos os A's são B's" e "Todos são A's", no primeiro caso, onde o quantificador é de tipo $\langle 1, 1\rangle$

[68] *ISOM enforces topic neutrality, whereas HOM in addition enforces number neutrality: not only is the actual extension of predicate expressions deemed irrelevant to logic, but also the number of objects in those extensions.*

[69] *The operations definable from the operations of the predicate calculus PC without equality are exactly those definable from homomorphism invariant operations of monadic type.*

[70] *The monadic (generalized) quantifiers satisfying HOM are exactly the ones definable in FO without identity.*

"todos" significa o mesmo independentemente da quantidade de A's e B's, isso é, $A \subseteq B$, já no segundo caso "Todos" significa a cardinalidade de A, sendo assim "contexto modulada". O ponto de Feferman é que parece absurdo uma operação lógica ser dependente do contexto, mas se admitirmos ISOM como critério de logicidade, *determinantes* da linguagem natural podem assumir o papel de operadores lógicos que de certa forma mudam de significado, o que realmente é estranho.

Posto de uma outra maneira, ISOM é um critério necessário e não suficiente para definir um quantificador. A proposta de Feferman é HOM como critério necessário e suficiente. A abordagem é abstrata, uma prévia a qualquer sistema. Há no entanto uma semelhança entre esta proposta e aquela tarskiana mais conhecida. O ponto para definir logicidade é a invariância de operações mediante algum critério. O critério de Feferman, que não é mais a mera permutação, restringe, como já vimos, aquilo que chamamos de lógica à Lógica Elementar sem identidade. Nas duas perspectivas há uma certa tensão entre os fatos de que queremos que as operações sejam fortes para manter seu significado e queremos saber até onde elas mantém esse significado. Pois o problema parece ser que definir a força desse significado já parece ser definir o limite de sua abrangência e da mesma forma, definir o limite do que seria lógico (como por exemplo aquelas operações da lógica clássica sem identidade), já seria estabelecer exatamente qual é o tipo de operação que eu desejo classificar como sendo lógica. Talvez essa crítica se apresente mais direta da seguinte forma: Cada vez que eu estabeleço um critério de invariância para definir logicidade, tudo que eu estou fazendo é explicando até que medida algo é lógico a partir daquele critério, mas não dizendo porque aquele é o critério mais adequado de logicidade. Essa posição crítica à perspectiva de Feferman é em linhas gerais o que van Benthen defende. A exposição que van Benthen faz, no entanto, é muito mais sofisticada e informativa. Antes de chegar à visão de Feferman a subseção 3 do trabalho mostra por exemplo a proximidade entre as noções de permutação e isomorfismo, dá exemplos de operações de segunda-ordem e relações da linguagem natural[71] que têm a propriedade da invariância, e apresenta inclusive um modo de classificar o conjunto de todas operações invariantes a partir de combinações Booleanas de seus argumentos. No entanto, mesmo acabando com a magia, a observação que mais nos chama atenção é a seguinte.

> Vamos dissipar qualquer ar de mistério aqui. Essas observações têm um background simples na lógica standard - uma vez que seguem o lema do isomorfismo acima. Aqui está o porquê. O Lema vale para qualquer linguagem lógica bem-comportada, não apenas de primeira ordem, mas também em tipos superiores, ou com expressões infinitárias. Assim, qualquer expressão definível é invariante por permutação. Mas todos os exemplos mencionados até agora - e todos os que conheço na literatura - são definíveis em tais linguagens lógicas [72]. (BENTHEM, 2002, p. 423, tradução nossa)

[71] No caso alguns quantificadores generalizados, incluindo o 'Most' e a relação *self* tomada como predicado unário, a relação Rxx como um predicado $\phi(x)$.

[72] Let us dispel any air of mystery here. These observations have a simple background in standard

Invariância como critério necessário para logicidade é algo realmente interessante. Por outro lado, se fosse assumida como critério suficiente tomaria por lógico tudo aquilo que é definível numa linguagem formal ou em uma família de linguagens. Invariância pura é um critério ingênuo, de fato não conhecemos proposta do gênero. Esclarecer isso, por outro lado, é um ponto interessante no debate sobre a classificação de quantificadores. A análise de van Benthem é ao mesmo tempo técnica e reflexiva e entre exposições e demonstrações apresenta a seguinte digressão feita por Hermann Weyl's em 1926 para o caso da geometria (BENTHEM, 2002, p. 424, 425) que em livre tradução seria: todas a relações geométricas logicamente definíveis são invariantes sob transformações geométricas usuais, mas é possível que todas as relações que sejam invariantes são logicamente definíveis? A resposta de Weyl's é que a questão é difícil e provavelmente insolúvel. Para van Bentham, por outro lado, essa é a deixa para apresentar alguns resultados técnico contemporâneos sobre o tópico.

O primeiro é o fato de que em uma linguagem L, por razões de cardinalidade, finitária não pode ser assegurada qualquer equivalência geral entre "invariância sobre automorfismo" e "definibilidade". "The only automorphism of $\mathbb{N}$ is the identity - and so there are uncountably many invariant subsets of natural numbers, which outrun the resources of standard logical languages" (BENTHEM, 2002, p. 425). Uma outra, um pouco mais auspiciosa, ao menos para responder a questão levantada por Weyl's, é demostrada por van Benthem a saber, que "On finite models, the L-automorphism invariant predicates of individuals are exactly the first-order L-definable ones"(BENTHEM, 2002, p. 425). Sumarizando a pergunta simples é: definição em primeira ordem e invariância são o mesmo? Em modelos finitos sim. Seria então invariância um critério de logicidade ou, ao contrário, um limitador sob medida?

Invertemos a ordem de apresentação. A proposta de Feferman é de fato um refinamento da invariância sobre permutação, mas a crítica de circularidade é quase a mesma. É notório que a abordagem modelística predominante em nosso texto não é a única possível. O mínimo que se pode oferecer, em termos de abordagens sobre a lógica, é uma oposição/contraste entre a teoria de modelos e o que os lógicos chamam de *proof-theory*[73]. Uma abordagem cuidadosa da logicidade sob a perspectiva da teoria da prova nos obrigaria a estruturação de uma outra seção como esta. Podemos aqui, no lugar, dizer o que é mais caro a este ponto de vista.

Antes de mais nada, o objeto "lógica" em questão é agora de interesse daqueles que pretendem saber que afirmações se seguem obrigatoriamente de outras, ou em que

logic - since they follow from the above Isomorphism Lemma. Here is why. The Lemma holds for any well-behaved logical language, not just first-order, but also in higher types, or with infinitary expressions. Thus, any definable expression is permutation-invariant. But all examples mentioned so far - and all in the literature that I am aware of - are definable in such logical languages.

[73] Com menos polêmica do que traduzem o termo, mais comumente traduzido como "teoria da prova" e menos comumente, mas muito mais veementemente defendido, como "teoria da demonstração".

circunstâncias isso ocorre. A chave desse estudo é o processo de inferência e tal processo tomado em sua consequência final ou objetivo, a prova/demonstração. Como matéria de conhecimento, ciência ou seja lá como se deseje pensar a lógica, é natural que se procure saber se há condições universais para a realização de tal processo, ou mesmo quão geral é o processo de obter conclusões a partir de informações prévias. Observe os grupos de frases abaixo como inferências tendo a última frase em cada caso como consequência[74].

1.4.3.a A maioria das crianças brinca.
Consequentemente: Algumas crianças brincam.

1.4.3.b Pelo menos duas crianças brincam.
Consequentemente: A maioria das crianças brinca.

É fácil ver que em **1.4.3.a** a conclusão se segue da premissa e que esse não é o caso de **1.4.3.b**. Nos exemplos abaixo nós vemos que isso continua como está ainda que tenhamos outros predicados nas frases, mas os mesmos quantificadores.

1.4.3.a' A maioria das crianças tem mais futuro do que o presidente.
Consequentemente: Algumas crianças têm mais futuro do que o presidente.

1.4.3.b' Pelo menos duas crianças tem mais futuro do que o presidente.
Consequentemente: A maioria das crianças tem mais futuro do que o presidente.

A análise das inferências pode ser feita da perspectiva da relação de consequência, essa é inclusive a maneira mais sofisticada de fazer isso[75]. Nós aqui, no entanto, nos aproveitamos do fato de que tal relação está associada à forma para expor que o que acontece acima, com os nossos poucos exemplos, deve acontecer em qualquer substituição de predicados que seja realizada. Uma característica interessante das linguagens, naturais ou não, é que não são todas as expressões, mas apenas certas categorias delas, que se apresentam fixas em argumentos onde variamos outras expressões. Entre outras expressões fixas na forma, ou melhor, constantes, estão os quantificadores, sendo a *constância* matéria da *forma* e a forma característica das inferências, se coloca nela, na constância, um critério de logicidade. Saber se uma expressão é lógica, e no nosso desafio aqui, classificar um quantificador como lógico, pode ser traduzido para "saber se esse quantificador possui a propriedade da constância".

[74] Seria natural apresentar exemplos de inferências com quantificadores lógicos, ou silogismos aristotélicos aqui, no entanto buscamos só uma noção geral de inferência e a apresentação de exemplos com quantificadores não convencionais visa a abrir o leitor à perspectiva de que é possível pensar um padrão de inferência para outros quantificadores.

[75] Para uma análise filosófica mais completa dessa perspectiva, ver McKeon (2010).

Contra o argumento de que a "constância" seria uma propriedade arbitrariamente escolhida, o que tornaria a definição de logicidade circular, como argumentamos no caso da invariância sobre permutação, Peters e Westerst (2006, p. 335, tradução nossa) argumentam "Tal constância é um fato empírico sobre as línguas, e não algo que os teóricos possam estipular de uma maneira ou de outra. Além disso, é um fenômeno que pode ser usado para identificar expressões que são constantes no sentido interpretativo mais abstrato[76]. O argumento é forte para contrariar uma alegação de arbitrariedade na escolha da constância como critério de logicidade. Ele além disso nos dispensa de uma resposta sobre o porquê dela ter sido escolhida como critério, naturalizando de certa forma a lógica. Por fim o argumento parece nos livrar do problema da circularidade para o critério "constância".

Para explorar melhor as ideias de "forma" e de "constância" na caracterização de quantificadores vamos abstrair o conteúdo de algumas inferências, começando pelas de **1.4.3.a/b**. Pense as frases acima como numa linguagem formal com quantificadores generalizados como $Q^{Ma}x(\phi(x), \psi(x))$, $Q^{\geq 2}x(\phi(x), \psi(x))$ e $Q^{\exists}x(\phi(x), \psi(x))$ sendo C a extensão de ϕ e B a extensão de ψ. Vamos abreviar isso para $Q^{Ma}(C, B)$, $Q^{\geq 2}(C, B)$ e $Q^{\exists}(C, B)$ uma vez que precisamos só das formas. O que acontece nos dois exemplos é que:

Se $Q^{Ma}(C, B)$, para todo C e todo B temos $Q^{\exists}(C, B)$;

e

Não é necessário que se $Q^{\geq 2}(C, B)$, para todo C e todo B teremos $Q^{Ma}(C, B)$.

Esses são exemplos de constância muito localizados no caso específico de cada inferência entre cada um dos dois quantificadores em questão no argumento. Na tentativa de generalizar o conceito de constância de um quantificador, deveríamos tratar preferencialmente de um quantificador generalizado qualquer[77] Q, no lugar desses específicos ($Q^{Ma}, Q^{\geq 2}$ e $Q^{\exists}$). Por exemplo, vejamos como podem ser algumas das inferências que deixam Q constante mediante a mudança de predicados com distintas características.

Veja nos quadros abaixo quatro padrões de inferência distintos para um quantificador arbitrário Q [78].

[76] *Such constancy is an empirical fact about languages, not something theorists can stipulate one way or the other. Moreover, it is a phenomenon that can be used to identify the expressions which are constant in the more abstract interpretational sense.*"

[77] Este "qualquer" obviamente tem um limitante. Uma vez que cada um dos quantificadores envolvidos nas inferências é de tipo $\langle 1, 1\rangle$, esse quantificador abstrato também será.

[78] A notação que aparece abaixo será mais detalhada, no entanto é importante saber que cada um dos padrões apresentados aí é um padrão de permanência da constância na inferência de quantificadores mediante aumento ou diminuição de um dos conjuntos extensão dos predicados. Assim, *Mon* significa monotonicidade, a seta ascendente ou descendente indica se a permanência se dá com o aumento ou diminuição dos conjuntos, e o lado de *Mon* onde a seta aparece indica que argumento do quantificador, se o da direita ou da esquerda, está variando.

$$Mon\uparrow \frac{Q(A,B) \qquad B \subseteq B'}{Q(A,B')} \qquad \uparrow Mon \frac{Q(A,B) \qquad A \subseteq A'}{Q(A',B)}$$

$$\downarrow Mon \frac{Q(A,B) \qquad A' \subseteq A}{Q(A',B)} \qquad Mon\downarrow \frac{Q(A,B) \qquad B' \subseteq B}{Q(A,B')}$$

Tudo bem que a relação de inclusão dá um caráter semântico, e uma sensação de que saímos do tratamento bruto da forma, às deduções acima. Na verdade o nosso objetivo com tais deduções é apenas apresentar algumas combinações em que podem variar os predicados que aparecem nas sentenças. A constância, ou melhor, a razão pela qual são constantes os quantificadores, não é única. Isso é, cada quantificador é constante a partir de uma perspectiva do que vale como inferência. Observe que o argumento de Peters e Westernståhl dado acima absolve a constância, como critério de logicidade, da circularidade, não nos diz nada, no entanto, sobre as razões que temos para escolher determinada constância como aquela que nós preferimos. Essa constância, definida pelo padrão inferencial, não deixa de ser uma escolha centrada na nossa opção sobre o que é lógico. Como exemplo, se eu digo que minha forma de escolher quais expressões são lógicas e quais não são é observar se elas são constantes dentro de inferências. É claro que se as inferências que eu aceito são aquelas da lógica paraconsistente, as constantes que eu vou aceitar serão da mesma lógica. O que acontece aí não é, então, uma estratégia para separar as expressões lógicas das não-lógicas, mas as paraconsistentes das não-paraconsistentes.

Bem, este último argumento de circularidade é nosso. A análise de van Benthem é mais no sentido de que deveríamos utilizar distintas abordagens sobre a lógica como a teoria de modelos e a teoria da prova (em acréscimo ele ainda propõe uma abordagem computacional e uma em teoria dos jogos) preferencialmente a uma só na definição de um critério de logicidade. O trabalho de van Benthem é o de dizer que os critérios teoréticos para definir logicidade servem melhor quando tratados em conjunto. O nosso é simplesmente de que a avaliação do que é lógico, ou não, dentro de uma abordagem previamente escolhida ou de uma postura[79], como prefere Benthem, tem grandes chances de ser viciada.

Nossa conclusão deve apresentar também a nossa postura aqui. Não temos uma nova noção de logicidade, de fato. Não há qualquer oposição aqui ao critério de Neutralidade ou Constância, ao contrário do que possa parecer. A visão respeitosamente crítica que se impõe ou que tivemos a pretensão de trazer é a de que Constância e Neutralidade parecem ser termos vagos e que cada vez que uma noção como estas é sistematizada temos algo a

[79] *stance*

perder ou mesmo acabamos por estabelecer um domínio restrito de cada uma delas (por exemplo na neutralidade tópica ou numérica no caso de Feferman). É possível entender que se defenda, por outro lado, que se existem níveis de neutralidade o que é desejável como lógico é o nível mais "puro". Mas esse argumento só traz mais uma vez ao centro do debate uma lógica clássica ou minimal, e faz isso, nos parece, em razão de criar um critério extra para a logicidade (o de pureza).

Nós pensamos aqui, por outro lado, que podemos dentro do que é ou seria neutro, falar de um nível de precisão. Quantificadores ou constantes podem ser classificados como mais ou menos precisos dentro de alguns critérios, que estão sintetizados no capítulo 4, mas não mais ou menos lógicos. Talvez não seja possível dizer em que momento um quantificador deixe de ser lógico, mas ganharemos uma classificação, acreditamos nós, que nos apresenta em que medida podemos falar da neutralidade dos quantificadores. Os quantificadores aristotélicos, mesmo na abordagem fregeana, podem ser entendidos como absolutamente precisos, mas o que perdem e ganham outras expressões quantificadoras que em certa medida são neutros e constantes? A partir do próximo capítulo exploraremos abordagens que em certa medida tentam aproximar quantificadores muito distintos no uso de abordagens lógicas. Vamos notar que essas tentativas, que parecem procurar condições de precisão e neutralidade dos quantificadores, acabam por demonstrar seus limites como quantificadores lógicos.

2 PRECISIFICAÇÃO E FORMALIZAÇÃO DE QUANTIFICADORES

Neste capítulo nos dedicaremos a apresentar algumas estratégias para definir quantificadores. Ao longo do primeiro capítulo, citamos Mostowski, na década de 1950, e Lindström, na década 1960, que nos apresentaram diretrizes gerais para a generalização da quantificação, mas, como veremos, na dimensão semântica, apresentar as condições de verdade de um quantificador individualmente permanece algo complicado. Antes de um roteiro, calcado nas estratégias presentes contemporaneamente na literatura, falaremos de uma opção que pode parecer imediata, mas que se mostra ingênua e frágil em 2.1. Aqui temos também o objetivo de trazer à baila certas propriedades dos quantificadores não-lógicos. Na segunda seção faremos um trabalho de apresentação das opções no "mercado" da lógica para as representações desses quantificadores, com o objetivo de excluir ou adotar determinadas abordagens.

2.1 Uma estratégia inócua de precisificação.

Uma vez que reconhecemos a existência de quantificadores cardinais não definíveis em uma lógica de primeira ordem, cabe a pergunta sobre se essas duas categorias encerrariam as formas de quantificar. Melhor dizendo, se as formas corriqueiras de quantificar em nossa linguagem têm nas ferramentas descritas acima um aparato suficientemente forte para sua formalização, apesar das dificuldades. E pela terceira vez, de modo ainda mais direto, se qualquer forma linguística de quantificar pertenceria a uma dessas categorias (lógica/cardinal), ou se haveria mais possibilidades não contempladas entre essas duas[1]. Lembremos, parece viável dizer que é consensual identificar "a maioria" e "mais da metade", não obstante, alguém pudesse argumentar de algumas maneiras diferentes que "mais da

[1] O leitor com treinamento linguístico pode achar essa questão tanto esquisita quanto primária. Pode-se pensar que as questões são levantadas por um desconhecimento, por parte do autor, de que já existe uma classificação nas línguas naturais para aquelas quantificações feitas por meio da categoria sintática onde são utilizados *Determinantes*, que é a categoria dos *D-quantificadores*, e quelas feitas por meio de *advérbios, afixos, auxiliares etc.* abarcados na categoria que é conhecida como dos *A-quantificadores*. Pode-se dizer que as categorias de quantificadores, semanticamente falando, estão dadas pelos tipos $\langle 1 \rangle$, $\langle 1, 1 \rangle$, etc. e que nesse sentido não há mais o que quantificar. E pode-se ainda fazer uma classificação dos quantificadores pela classe gramatical das palavras usadas como quantificadores, dizendo que existem além dos quantificadores apresentados até aqui, aqueles da linguagem que estão implícitos em pronomes possessivos e em combinações de possessivos, exceptivos (marcadores de exceção) e em termos de reciprocidade. Por fim alguém poderia pensar que a separação proposta aqui envolve colocar de um lado as quantificações diretas, chamadas explícitas em Peters e Westerst (2006, p. 15), daquelas que são interpretações de termos modais (deônticos, epistêmicos etc.) como quantificadores, por exemplo aquela que interpreta "*deve* como *em* ***todas*** *as vezes* em que o correto se realiza". O ponto aqui, então é de que se trata ainda de uma outra classificação e por ora estabelecer isso já é suficiente.

metade" não seria suficientemente preciso. Por exemplo, primeiro em contextos em que temos um número ímpar de objetos indivisíveis, "a maioria" não seria somente "mais da metade", mas precisamente "o primeiro inteiro depois da metade" o que por vezes, quando o contexto é o ambiente institucional, chamamos de "maioria absoluta". Um segundo caso seria na possibilidade da disputa pela maior partição de um domínio ocorrer entre mais de dois subconjuntos, como no caso de uma disputa eleitoral com pelo menos três candidatos. Aqui poderíamos argumentar que um termo mais apropriado que "A maioria" seria "A maior parte".[2] Em terceiro lugar está a situação em que quantificamos sobre um domínio infinito enumerável E e um subconjunto E' de E, também infinito, definido como "para cada elemento $e \in E$, ou $e \in E'$ ou $e + 1 \in E'$ e exatamente um entre e e $e + 1$ pertence a E', em certo contexto E' é a metade de E, a questão é que ainda assim a cardinalidade é igual e de forma mais ampla não faz sentido dizer que um é metade do outro, como não faria sentido dizer que $E' + e$ (seja qual for o e) é maioria de E. No segundo caso não estaríamos falando propriamente de maioria a não ser que um processo como *freezing* ou *resunptio* seja realizado, nos outros dois casos não temos qualquer prejuízo com a definição já apresentada para um quantificador Q^{Ma}. Isso justamente porque ele é definido para a cardinalidade. Vamos imaginar, por outro lado, que alguém desejasse apresentar uma definição no padrão utilizado até aqui para as expressões quantificadoras "pequena parte", "grande parte" e "Quase todos".

Por outro lado, a noção de "maioria" no caso de Q^R depende, de certa forma, das noções de metade ($\frac{1}{2}$) e "contraparte" e na realidade as quantificações na linguagem natural são sempre ou quase sempre sobre domínios finitos, onde pensar em metade e pensar em um meio são coisas muito próximas. Além de "a maioria" podemos dizer intuitivamente que os quantificadores lógicos também são dependentes de algumas noções de quantidades: total, nulo, ou a pelo menos um. Logo, é viável pensar que existe um conceito numérico subjacente a qualquer sentença quantificada. Nesse caso, parece fazer algum sentido estabelecer uma noção de proporção, ainda que como um teste, para os novos quantificadores.

Começando com "grande parte" e a ideia, que reconhecemos ser simplista, de que precisamos de uma definição consensual, ou que assim pareça, para essa expressão quantificadora. Antes de mais nada, é importante reforçar a percepção de que essa expressão, assim como "a maioria", se aplica a uma relação entre dois subconjuntos de um domínio, sendo assim de tipo $< 1, 1 >$. Bem, em termos de valor semântico de uma sentença, "grande parte dos A's são B's" podemos aceitar que sempre que "a maioria dos A's forem B's" estamos diante de um dos casos em que "grande parte dos A's são B's", por outro lado, nem sempre é necessário assegurar a maioria de um conjunto para que se tenha

[2] Suponha que em uma eleição os candidatos A e B tiveram 30% dos votos válidos cada e que um candidato C vence as eleições com 40% dos votos. Podemos dizer que o candidato C, embora não tenha conquistado "A Maioria" dos votos, foi eleito com "A Maior parte" dos votos válidos.

grande parte dele. Por exemplo, em uma disputa eleitoral com dois candidatos quando um deles vence com 60% dos votos válidos. O derrotado com 40% sempre pode alegar que tem legitimidade em questionar as decisões do vencedor em nome do fato de ter conseguido grande parte[3] dos votos. Isso é, em alguma margem abaixo da metade também podemos dizer que temos grande parte de um conjunto. O que podemos pensar, levando em conta a noção de contraparte, é que parece que a noção de "minoria" está para "maioria" como "grande parte" está para "pequena parte", tão logo tenhamos uma noção, ganhamos a outra. Se isso for verdade, pode valer à pena arriscar uma "porção subjacente" para "grande parte", digamos que essa porção seja $\frac{1}{3}$. Apenas para apressar outras interpretações apresentaremos mais quantificadores de modo informal e abaixo falaremos um pouco sobre essas interpretações dentro de nossa delimitação arbitrária de porções.

Parte $Q^{>1}$

Qualquer porção maior que 1

Pequena parte $Q^{<\frac{1}{3}}$

Menos que 1/3 do total do domínio

Grande parte $Q^{\geq\frac{1}{3}}$

Proporção maior ou igual a 1/3 do total.

Quase todos $Q^{\geq\frac{2}{3}}$

Superior a 2/3

Como já dissemos, "grande parte" não tem necessariamente equivalência com "a maioria", contudo, alguém pode defender que algo como "a maioria da metade", isto é, uma razão posterior a $\frac{1}{4}$, é uma boa forma de regimentar "grande parte" levando em conta sua contraparte como "pequena parte", esta como qualquer porção igual ou inferior a $\frac{1}{4}$, com alguma coerência. Pode-se defender que "uma parte" é uma porção qualquer e que alguém usa este quantificador sempre que quer se referir a uma quantidade arbitrária não conhecida, mas esta pessoa poderia abrir mão do uso de tal quantificação caso tivesse a quantidade exata à qual pretende se referir. Assim, sabendo que existe um elemento de A

[3] Pensando com a perspectiva de um enunciado imagine que Aécio Neves se referindo ao seu desempenho no segundo turno das eleições de 2014 para a presidência e declarando "Eu tive uma grande parte dos votos na eleição.". O que está sendo enunciado é que mesmo menos que a metade pode ser pensado como "uma grande parte". Alguém poderia, e de fato o fez ao ler este manuscrito, promover uma interpretação na qual "uma grande parte" e "grande parte" significariam coisas distintas, e enquanto a primeira expressão pode ser aceita como porção abaixo da metade a segunda não. O que está em questão é que a interpretação da segunda expressão parece supor alguma interpretação com artigo implícito. Alguém que defenda que "grande parte" deve corresponder à maioria inequivocamente interpreta esta "grande parte" com um artigo definido e pensa em algo como "a grande parte", caso contrário está está pensando como implícito o artigo indefinido "uma". Nossa objeção a essa forma de interpretar se baseia na mera observação do uso, nos parece que quando alguém pretende se referir à maioria o uso de "a maior parte" é muito mais natural do que o uso de "a grande parte", ou mesmo que o falante consegue perceber ser mais relevante fazer uso de "maioria" quando quer se referir a qualquer porção maior do que a metade do que "grande parte".

que seja B é mais relevante ressaltar sua unidade do que contar este elemento como uma "parte" haja vista que fazer algo diferente disso pode fomentar a produção de falácias como as dos Cavalhosos de nossa introdução. Por fim, temos "quase todos" como o conjunto que tem como "excedente"[4] de "pequena parte". Vamos problematizar estas associações arbitrárias.

Iniciando uma autocrítica a uma proposta deste gênero, podemos reconhecer a imprecisão contida nas ideias de "excedente" e mesmo de "contraparte". Bem, de forma oportuna podemos ao mesmo tempo apresentar algumas combinações booleanas[5] em teoria da quantificação generalizada. Comecemos pela dualidade de um quantificador para em seguida explicar a ideia do tipo de relação que existe entre "grande parte" e "pequena parte". Para um quantificador Q de qualquer tipo dizemos que Q^d[6] é o seu dual:

(2.1.a) $Q^d = (\neg Q)\neg = \neg(Q\neg) = \neg Q\neg$

A interpretação da negação em uma lógica com quantificador generalizado Q de tipo $\langle n_1, ..., n_k\rangle$ com cada R_i sendo uma relação n-ária do modelo **M** segundo Szymanik (2016, p. 30) é:

(2.1.b) Negação externa $\neg Q^M(R_1, ..., R_k)$ *sse não é o caso* $Q_M(R_1, ..., R_k)$

Negação Interna $Q^M\neg(R_1, ..., R_k)$ *sse* $Q_M(R_1, ..., R_{k-1}, M - R_k)$

Os exemplos serão a aplicação direta dos quantificadores que vamos introduzir. Vamos considerar o quantificador $Q^{\geq\frac{1}{3}}$ e supor que ele seja de tipo $\langle 1, 1\rangle$. Assim, uma expressão como "grande parte dos $A's$ são $B's$" é interpretada por uma relação $Q_{\geq\frac{1}{3}}$ entre dois conjuntos A e B da forma $Q_{\geq\frac{1}{3}}(A, B)$. A negação externa de uma fórmula desse tipo (na verdade do tipo $\neg Q^{\geq\frac{1}{3}}(A, B)$) diz que "não é o caso que exista pelo menos um terço dos $A's$ que sejam $B's$", ou seja, que "menos de um terço dos $A's$ são $B's$". Assim, $\neg Q_{\geq\frac{1}{3}}(A, B)$ é o mesmo que $Q_{<\frac{1}{3}}(A, B)$ e em nossa interpretação "não grande parte" é o

[4] Termos mais precisos do que "excedente" e "contraparte" serão apresentados, na verdade os conceitos de complemento e pós-complemento. Para uma abordagem mais alinhada aos nossos objetivos, no entanto, pedimos só um pouco mais de paciência do leitor.

[5] Aqui não usaremos, mas os casos para combinações booleanas com conectivos são os seguintes. Dados os quantificadores generalizados Q e Q' de tipo $(n_1, ..., n_k)$. Defini-se (SZYMANIK, 2016, 30):

$(Q \wedge Q')_M(R_1, ..., R_k)$ *sse* $Q_M(R_1, ..., R_k)$ *e* $Q'_M(R_1, ..., R_k)$ (conjunção).
$(Q \vee Q')_M(R_1, ..., R_k)$ *sse* $Q_M(R_1, ..., R_k)$ *ou* $Q'_M(R_1, ..., R_k)$ (disjunção).

[6] O que apresentamos aqui é uma simplificação de notação para uma fórmula. Por exemplo para um quantificador tipo $\langle 1, 1\rangle$, Q^d representa a fórmula $Q^d x(\phi(x), \psi(x))$ e definida como $\neg Qx\neg(\phi(x), \psi(x))$ para um quantificador generalizado Q de tipo $\langle 1, 1\rangle$.

mesmo que "pequena parte". A volta também vale, "havendo menos que um terço" então "não é verdade que existe ao menos um terço" essa equivalência $\neg Q_{\geq \frac{1}{3}}(A, B)$ *sse* $Q_{<\frac{1}{3}}(A, B)$ (e mais essa $Q_{\geq \frac{1}{3}}(A, B)$ *sse* $\neg Q_{<\frac{1}{3}}(A, B)$) se devem ao fato de que a negação externa de um quantificador está aqui definida em nossa estrutura como o **complemento**. Já a negação interna de "grande parte dos $A's$ são $B's$", uma fórmula da forma $Q^{\geq \frac{1}{3}}\neg(A, B)$, é por definição $Q_{\geq \frac{1}{3}}(A, M - B)$ isso é, a negação interna aplica o quantificador ao conjunto complemento de B, o que torna relevante para a operação somente a parte de A que não é B. Assim, negação interna em nossa interpretação para $Q^{\geq \frac{1}{3}}$ é "grande parte (pelo menos um terço) dos $A's$ não são $B's$" visualmente:

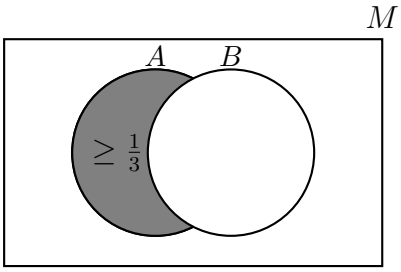


Figura 7 – Pós-complemento $\geq \frac{1}{3}$

Note que nesta operação o que não interessa, contrariamente a **1.3.d** na página 46, é $A \cap B$. Por isso, quantificadores com essa propriedade, de não dependerem de interseções entre conjuntos, são por vezes chamados co-intersectivos (*ver.* (KEENAN, 2004)). Esta operação recebe o nome de **pós-complemento** e cumpre um papel interessante na linguagem natural para alguns quantificadores relativos a proporções, a saber aqueles que são "fixados pelo pós-complemento". Gosseiramente, podemos dizer que um quantificador é fixado pelo pós-complemento se o quantificador [7] e sua negação interna são equivalentes (Q *sse* $Q\neg$) estamos usando uma simplificação da definição dada por Keenan (2008), de onde também usamos os exemplos que seguem para sentenças com quantificadores fixados pelo pós-complemento:

a) Exatamente metade dos alunos obtiveram um A no exame.

b) Exatamente metade dos alunos não obtiveram um A no exame.

c) Entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ dos estudantes obtiveram A no exame.

d) Entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ dos estudantes não obtiveram A no exame.

No mesmo trabalho Keenan (2008) define os quantificadores "entre p e q" e "mais que p e menos que q" onde p e q são frações $0 \leq p \leq q \leq 1$ e $p + q = 1$ e apresenta

[7] Para não provocar inquietação no leitor, adiantamos que os quantificadores que implementamos não são fixados pelo pós-complemento.

teorema para provar que são fixados pelo pós-complemento. Este é o resultado conhecido como teorema *mid-point*. O quantificador "grande parte" tal qual apresentado acima não é fixado por seu pós-complemento. Ainda é possível uma questão sobre qual seria o dual de nosso quantificador $Q^{\geq\frac{1}{3}}$ ou que quantificador $Q^{\geq\frac{1}{3}^d}$ em uma fórmula $Q^{\geq\frac{1}{3}^d}(A, B)$ resulta em uma fórmula equivalente a $\neg Q^{\geq\frac{1}{3}}\neg(A, B)$. O dual é a negação do pós-complemento, e o pós-complemento a negação interna. O pós-complemento de "pelo menos um terço dos $A's$ são $B's$" é "pelo menos um terço dos $A's$ não são $B's$". A negação disso (e por consequência o dual do primeiro quantificador) é "não é verdade que pelo menos um terço dos $A's$ não são $B's$" dito de outro jeito, "a parte dos $A's$ que não são $B's < \frac{1}{3}$", mais uma vez visualmente:

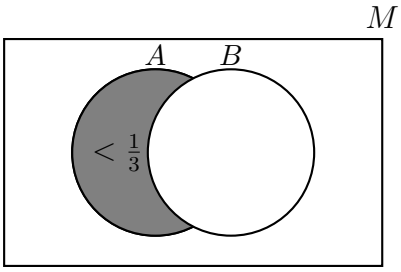
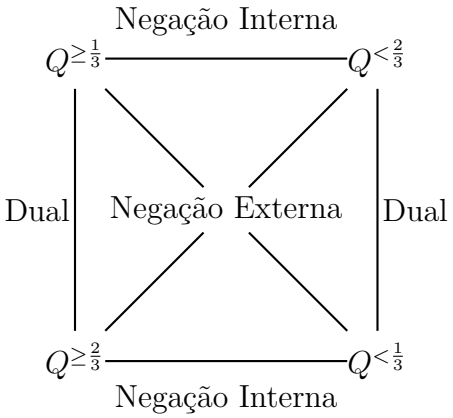


Figura 8 – Pós-complemento $< \frac{1}{3}$ ou dual de $\geq \frac{1}{3}$

Se $A - B$, ou melhor, a parte de A que não é B é menor do que $\frac{1}{3}$, então a parte de A que é B é $\geq \frac{2}{3}$. Isso é, $|A \cap B| \geq \frac{2}{3}.|A|$[8]. Assim, o dual $Q^{\geq\frac{1}{3}^d} = \neg Q^{\geq\frac{1}{3}}\neg = Q^{<\frac{1}{3}}\neg = Q^{\geq\frac{2}{3}}$ o nosso quantificador "quase todos". Os quantificadores e suas propriedades parecem estar associados, quase que como em um quadrado de oposições categóricas. Só para ilustração, leve em consideração que esse quadrado se encerraria com o quantificador equivalente à negação externa de $Q^{\geq\frac{2}{3}}$ que é equivalente à negação interna de $Q^{\geq\frac{1}{3}}$ e que é equivalente ao dual de $Q^{<\frac{1}{3}}$. O quantificador que nos falta, então, é $< (1/3)^d = [< (3 - 1/3)]$ ou $Q^{<\frac{2}{3}}$. E temos:



[8] De modo mais abrangente, (PETERS; WESTERST, 2006, p. 93) definem o dual de um quantificador proporcional (do tipo $\frac{p}{q}$) $(p/q)^d = [(q - p/q)]$ para domínios finitos.

Figura 9 – Quadrado de quantificadores proporcionais

Supondo que as explicações acima sejam suficientes para suplantar este primeiro problema, de associar os quantificadores "pequena parte", "grande parte" e "quase todos" e o nosso novo, digamos "quase nenhum" a certas medidas, temos ainda duas questões relevantes. Uma primeira questão seria, há alguma forma de generalizar a noção abstrata por trás de quantificadores desse tipo? Ou seja, alguma noção que pudesse nos ajudar a dizer que esses são quantificadores da mesma classe[9]? A essa questão, a resposta positiva é muito direta o que chamamos de *proportional quantifiers* são definidos de tipo:

$$\langle 1 \rangle \;\; [p/q]_M(A) \text{ sse } q.\,|A| \geq p.\,|M|; \text{ e}$$

$$\langle 1,1 \rangle \;\; [p/q]_M(A,B) \text{ sse } q.\,|A \cap B| \geq p.\,|A|.$$ [10]

Para alguns exemplos utilizaremos outra vez o nosso modelo simplificado $\mathbf{M} = \langle M, I \rangle$, apresentado na página 41. Vamos expandir a linguagem que usamos para o modelo $\mathbf{M}$ com o predicado $\gamma(x) =$ "x é uma pessoa influente para uma geração", de extensão $\gamma(x^{\mathbf{M},x}) = M$[11], e com o quantificador $Q^{\geq \frac{1}{3}}$, que leremos como "grande parte", de tipo $\langle 1,1 \rangle$, o que já nos dá as regras de construção de fórmulas do quantificador, e que tem a seguinte cláusula como condição de verdade para o quantificador:

$$\mathbf{M} \models Q^{\geq \frac{1}{3}} x(A,B) \; sse \; 3.|A \cap B| \geq 1.|A|$$

Em nosso modelo ϕ e ψ já têm interpretações e por isso usamos A e B aqui como meta-variáveis de predicados e também como conjuntos. Vamos apresentar algumas sentenças na linguagem de $\mathbf{M}$ e suas traduções com pequenas adaptações que ajudem na concordância das frases em português. Primeiro a fórmula:

> $Q^{\geq \frac{1}{3}} x(\gamma(x), \phi_1(x))$ tem a seguinte interpretação *"Grande parte das pessoas influentes para uma geração são orgulhos do papai".*

Observemos que a fórmula não é verdadeira em $\mathbf{M}$. A cardinalidade de $|\gamma(x)^{\mathbf{M},x}| = 6$ e a cardinalidade de $|\gamma(x)^{\mathbf{M},x} \cap \phi_1(x)^{\mathbf{M},x}| = 1$. Assim, $\mathbf{M} \models Q^{\geq \frac{1}{3}} x(\gamma(x), \phi_1(x)) \; sse \; 3.|1| \geq 1.|6|$, isso é, a condição para a fórmula ser verdadeira é que 3 seja maior que 6, assim não é o caso. Por outro lado vemos que $\neg Q^{\geq \frac{1}{3}} x(\gamma(x), \phi_1(x))$ é verdadeira, uma vez que

[9] Outra interpretação para esta questão, como fica claro logo à frente é: quais são as condições de verdade de uma fórmula com este quantificador em um modelo.

[10] Com o sinal de inequação apropriado sendo mantido. Definimos quantificadores como $< 1/3$ e nesse caso as definições passam a adotar também esse símbolo de inequação entre as cardinalidades.

[11] Lembrando que $M = \{Moe,\ Larry,\ Curly,\ Flávio,\ Carlos,\ Eduardo\}$.

não é o caso a relação $Q_{\geq\frac{1}{3}}(\gamma(x)^{\mathbf{M},x}, \phi_1(x)^{\mathbf{M},x})$[12] isso é, é verdadeira a declaração "não é verdade que grande parte das pessoas influentes para uma geração são orgulhos do papai". A partir da negação de nosso quantificador, podemos definir (já exemplificando) um novo quantificador $Q^{<\frac{1}{3}}$ como:

> $\neg Q^{\geq\frac{1}{3}}x(\gamma(x), \phi_1(x)) = Q^{<\frac{1}{3}}x(\gamma(x), \phi_1(x))$ com a interpretação *"Pequena parte das pessoas influentes para uma geração são o orgulho do papai"*.

Podemos exemplificar uma aplicação dos quantificadores duais por:

> $Q^{\geq\frac{1}{3}^d} = Q^{\geq\frac{2}{3}}$ dual de $Q^{\geq\frac{1}{3}}$ da seguinte forma $\neg Q^{\geq\frac{1}{3}}x\neg(\gamma(x), \phi_1(x))$ interpretado como *"não é verdade que grande parte das pessoas influentes para uma geração não são os orgulhos do papai"* com a nova forma $Q^{\geq\frac{2}{3}}x(\gamma(x), \phi_1(x))$ e com a nova interpretação *"Quase todas as pessoas influentes para uma geração são o orgulho do papai"*; e
>
> $Q^{<\frac{1}{3}^d} = Q^{<\frac{2}{3}}$ dual de $Q^{<\frac{1}{3}}$ da seguinte forma $\neg Q^{<\frac{1}{3}}x\neg(\gamma(x), \phi_1(x))$ interpretado como *"não é verdade que pequena parte das pessoas influentes para uma geração não são o orgulho do papai"* com a nova forma $Q^{<\frac{2}{3}}x(\gamma(x), \psi_1(x))$ e com a nova interpretação "quase nenhuma das pessoas influentes para uma geração são o orgulho do papai".

A segunda questão, daquela contagem que iniciamos na página 76, seria se existe algum modo de organizar esses quantificadores e seus modos de uso na linguagem natural por regras (descritivas). Isso é, nossas definições e algumas regras são capazes de estabelecer em que condições um quantificador que nem seja lógico, nem definido como Q^{Ma} mas, digamos, *quasi-preciso* é "adotado" em detrimento de outro na linguagem natural? De forma muito vaga, ao menos até o capítulo 3, onde pretendemos delinear a ideia mais clara, podemos pensar em um princípio de relevância das enunciações. Digamos que um princípio de relevância indique que alguém deva sempre priorizar o quantificador que traga mais informação ao enunciado proferido, mantendo a verdade ou falsidade do enunciado. Assim podemos pensar numa escala de relevância do modo seguinte. Primeiro, como já indicamos ao falar sobre o quantificador "parte", podemos imaginar que qualquer definição precisa é mais relevante que uma imprecisa isso é, sempre que eu estiver em condição de afirmar que "um estudante em minha sala fuma" essa declaração é mais relevante do que a informação "parte dos estudantes em minha sala fuma"; além disso dizemos que uma sentença A (que comporte um quantificador quasi-preciso, no sentido aberto usado acima) é mais relevante que uma sentença B se o quantificador quasi-preciso de A pressupõe uma

[12] *ver* **2.1.b** na página 73, além disso perceba que a nosso caso $R_1 = 3.|1|$, $R_2 = |1|.6$ e que o quantificador aplica a esses conjuntos a relação $\geq$.

frase com o quantificador quasi-preciso de B, mas uma frase com B não pressupõe uma frase com o quantificador de A. Como os exemplos abaixo.

- Se "Quase todos os alagoanos são bairristas", então "Grande parte dos alagoanos é bairrista". E não é o caso que se "Grande parte dos alagoanos é bairrista", então "quase todos os alagoanos são bairristas".

- Se "Quase nenhum alagoano é bairrista", então "pequena parte dos alagoanos é bairrista". E não é o caso que se "Pequena parte dos alagoanos são bairristas", então "Quase nenhum alagoano é bairrista".

Em termos genéricos, sejam Q^1 e Q^2 quantificadores quasi-precisos tal que Q^1 é mais relevante do que Q^2, e A e B fórmulas com uma variável livre apenas. Então, se $Q^1x(A, B)$ é verdadeira, então $Q^2x(A, B)$ também é verdadeira, no entanto, se $Q^2x(A, B)$ é verdadeira, $Q^1x(A, B)$ não é. O que parece é que existem escalas de quantificadores com (quase todos » grande parte), por um lado e (Quase nenhum » Pequena parte) por outro. Essas escalas são muito parecidas com a relação de subordinação aristotélica que já mencionamos desde a introdução e, de fato, são próprias de quantificadores com importação existencial.

Já protelamos muito uma explicação mais cuidadosa dessa propriedade. Vamos aqui fazer algumas observações sobre ela. Peters e Westerst (2006, p. 124) falam de algumas intuições conflitantes que podem afligir um estudante iniciante de lógica ao refletir sobre sentenças quantificadas. Vamos parafrasear essa problematização aqui.

1. Declarações com "todo", implicam casos particulares, ou instâncias dessas declarações individualizadas. Por exemplo, a declaração "Todo alagoano é bairrista" implica que "existe um alagoano bairrista". O domínio restrito, isso é, o conjunto de alagoanos, não é vazio.

2. Em "nem todo" = "não todo", "não" é uma negação que inverte o valor de verdade da sentença, a negação externa.

3. Declarações com "nem todo" implicam a existência de ao menos um indivíduo que contrarie a universalidade. Por exemplo, "nem todo alagoano é bairrista" implica que existe alguém, quem sabe "Morganna", que é alagoana, mas não é bairrista.

4. Tendo que decidir sobre a verdade ou falsidade de uma declaração com "todo", uma generalização, que tenha o domínio restrito vazio, por exemplo o conjunto dos "sacis" na frase "todo saci é malicioso", tais estudantes acabam por ceder que é mais viável pensar que são verdadeiras do que falsas. Isso acontece porque é impossível dar um contra-exemplo para esse tipo de declaração. É um raciocínio em conexão com 2.

Bem, as intuições isoladamente parecem ser inofensivas. A questão aqui é que algumas associações, em especial aquela entre 1 e 2, podem comprometer a intuição mais geral do conjunto das relações do quadrado aristotélico. Isso é, aceitando 1 estamos tomando por verdadeira a relação de subordinação entre A e I[13](Todo indica pelo menos um), por 2 aceitamos a relação de contradição, entre A e O ("Algum" indica que não é o caso "nenhum", contra-positiva de "não algum" indica nenhum), mas ao seguir a linha aristotélica, concordamos com a subalternação entre E e O (Nenhum indica não algum, contraditória de todo, lida também como não todo), aqui temos uma discordância com 3, pois se "nem todo" significa termos uma testemunha contra a generalização, então não se segue que possa ser consequência de uma declaração E com "nenhum". Assim, ou bem aceitamos 3 ou a relação de subordinação entre as proposições negativas. 4 na verdade é uma opção a 1, ao aceitá-la estamos rejeitando que absolutamente qualquer frase com "todo" deva ter elementos no seu domínio restrito, consequentemente a subordinação entre A e I.

A aceitação de 4, por outro lado, pode parecer gerar mais estranheza do que 1 no tipo de frases que seriam aceitas em linguagem natural. Isso é, no fim das contas, alguém pode alegar que podemos pagar o preço de ignorar frases como "todo saci é malicioso", definindo-as simplesmente como falsas, e manter a percepção aristotélica. Podemos fazer isso, diria o defensor, porque as consequências disso não são tão ruins e além disso esse tipo de declaração, atinente a domínios restritos vazios, não há de fazer tanta diferença. Mas isso é um equívoco nos dois casos. Entre as consequências da aceitação de 1 (e 2) está o fato de que caso tomemos como falsa a declaração "todo saci é malicioso" vale a contradição entre A e O, tornando verdadeira a declaração "nem todo saci é malicioso" o que causa tanta estranheza quanto assumir 4. A segunda justificativa para desprezar 4 é ainda mais problemática. A forma "Todo A é B" é muito importante para as ciências e em uma quantidade incontável de casos é importante como hipótese, para não entrar no escopo de um debate da filosofia da ciência, mas mostrar como essa segunda resposta é despropositada, pense que qualquer enunciado sobre partículas subatômicas se pretende universal, em alguns casos dentro de condições especificadas, mas podem ser enunciados sobre um conjunto vazio de entidades. O exemplo não evidencia que as declarações desse tipo, com o domínio restrito vazio,[14] são verdadeiras, mas demonstra que seu uso tem imensa utilidade. Não simplesmente por pagar o preço, mas porque cada uma das visões têm suas vantagens e desvantagens e porque estamos tentando limitar o escopo do debate à linguagem natural, e não necessariamente em sua aplicação científica. Vamos seguir a hipótese de que vale a importação existencial.

[13] Ver introdução página 19.

[14] Caso não tenha ficado claro as declarações com domínio restrito vazio a que nos referimos aqui são aquelas sentenças na forma $\forall x(A(x) \to B(x)$ ou $Q^{\forall}x(A(x), B(x))$ onde a extensão de A é um conjunto vazio.

Tomando a linha de aceitação da importação existencial e retomando ainda o debate sobre os exemplos que iniciamos na página 78. Se eu posso garantir que "Quase todos (ou grande parte dos) os alagoanos são bairristas", então eu posso garantir que "pelo menos Pequena parte dos alagoanos são bairristas", ou seja, estando entendido que pequena parte é uma quantidade menor que um terço e maior que 0 e garantindo mais de um terço eu também garanto menos que um terço. Por outro lado, não parece fazer sentido que eu possa garantir que "Quase nenhum alagoano é bairrista" (a partir de Quase todos/Grande parte) e nem faz muito sentido pensar em pelo menos quase nenhum, ainda que se levarmos em conta como o quantificador foi definido isso possa fazer sentido (Se eu posso garantir a existência de uma quantidade superior a um/dois terço também posso garantir a existência de uma quantidade inferior a dois terços). Podemos assim pensar os quantificadores dentro de escalas que são distinguíveis em negativa (Quase nenhum » Pequena parte) e positiva[15] (quase todos » grande parte) ou em uma grande escala com mais quantificadores, diversificados entre negativos e positivos, mas com um máximo de quantificadores que dão coerência à escala (Quase todos » Grande parte » Quase nenhum) / (Quase todos » Grande parte » Pequena parte) / (Grande parte » Quase nenhum » Pequena parte) / (Quase todos » Quase nenhum » Pequena parte). Parece que nessas escalas maiores temos o inconveniente de não englobar todos os quantificadores, como se a mera junção de escalas (positiva » negativa) não fosse satisfatória ou mesmo intuitiva. Vejamos, (Quase todos » Grande parte » Quase nenhum » Pequena parte) não parece haver uma ampliação de quantidade de "Quase nenhum" para "Pequena parte"? Além disso, quantitativamente, $> 1/3$ implica $> 2/3$ e não o contrário. Seria o caso de adotar outra escala (Quase todos » Grande parte » Pequena parte » Quase nenhum)? Uma escala organizada assim parece simplesmente apresentar a ordem dos requisitos de quantidade para que um quantificador determine a verdade ou não de uma sentença em que ele se encontre. Dito de um outro modo, na escala de quantidades ($\geq 2/3$ » $\geq 1/3$ » $< 1/3$ » $< 2/3$) importa nada mais do que a garantia de existência[16]. Aqui podemos passar das reflexões às críticas a uma tentativa de associação de quantificadores proposicionais a os quantificadores da linguagem natural escolhidos acima.

Uma reclamação muito justa à nossa associação arbitrária pode ser a de que não parece natural que "quase nenhum" possa representar uma quantidade maior do que "Pequena parte". Sejam $A = (a, b, c, d, e, f)$ e $B = (a, b, c)$ o nosso quantificador "quase

[15] Embora a distinção feita aqui seja vaga, a definição de positividade de quantificadores existe. Dizemos que um quantificador é positivo se tem a propriedade da positividade: $Q^M(A, B)$ implica $A \cap B \neq \emptyset$ (PETERS; WESTERST, 2006, 123). É negativo, por outro lado, se não tem tal propriedade. Muitas vezes em linguagem natural, e especialmente no caso dos quantificadores em questão (Quase nenhum e Pequena parte), o contexto impõe $A \cap B \neq \emptyset$ assim é necessário mudar a definição de negatividade para $A \cap B < |A|$.

[16] Pense que: Se existe pelo menos 2/3, existe pelo menos 1/3. Se existe pelo menos 1/3, eu tenho garantida qualquer quantidade menor do que 1/3. Se existem menos de 1/3 eu tenho garantido menos de 2/3.

nenhum" em uma fórmula para $Q_{<\frac{2}{3}}(A,B)$[17] seria definido como $3.|A \cap B| < 2.|A|$, e assim $3.|3| < 2.|6|$ tornando quase nenhum verdadeiro para o caso em que metade dos $A's$ são $B's$, "Pequena parte" dos $A's$ são $B's$, por outro lado, não está garantida e dada a mesma cardinalidade de A e B só estaria garantida caso $|A \cap B| = 1$. Ainda levando em consideração que não é comum afirmar "Pequena parte de A é B" quando se sabe que "não existe A que seja B". Assim, "Quase nenhum" pode ser mais que "pequena parte" e se isso não é desejável, uma recomendação direta seria: de forma rápida podemos inverter as interpretações em linguagem natural dos dois quantificadores mantendo o restante. Assim teríamos um novo quadrado que viramos de ponta-cabeça:

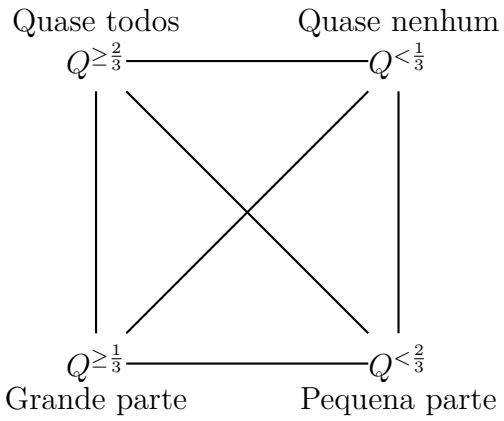


Figura 10 – Quadro de quantificadores naturais e proporcionais

Os quantificadores mantêm as mesmas posições relativas às suas negações, sendo assim estão também mantidos complementos, pós-complemento e duais para os quantificadores proporcionais, mas não para os em linguagem natural. A negação externa de "Quase nenhum A é B" deixa de ser "Quase todos os A's são B's" e passa a ser "Grande parte dos A's são B's", e a negação externa de "Pequena parte dos A's são B's" deixa de ser "Grande parte dos A's são B's" e passa a ser "Quase todos os A's são B's" e vice-versa. Contudo, parece plenamente aceitável que "não é verdade que Pequena parte dos A's são B's" diga o mesmo que "Grande parte dos A's são B's" no lugar de "Quase todos os A's são B's" mas o que realmente é curioso é que para os conjuntos A e B acima tanto $Q_{\geq\frac{1}{3}}(A,B)$ quanto $Q_{<\frac{2}{3}}(A,B)$ são o caso, um tanto quanto estranho dentro de nossa associação, pois "Grande parte dos A's são B's" ao mesmo tempo em que "Pequena parte dos A's são B's". Parece que nossa interpretação similar à clássica, que leva em consideração os quantificadores dentro de um quadrado de oposições e aceita a importação existencial, transforma esses quantificadores da parte baixa do quadrado em "subcontrários" que não podem ser falsos juntos. Isso na prática é um problema para a interpretação natural uma vez que parecemos

[17] A rigor A e B seriam interpretações de fórmulas em um modelo para o qual $Q^{<\frac{2}{3}}$ seria um quantificador definido pela a relação $Q_{<\frac{2}{3}}(A,B)$ além disso uma prova desse tipo tranquilamente poderia ser generalizada, mas optamos por uma explicação mais rápida dado o contraexemplo tão direto.

estar mais dispostos a aceitar quantidades que não sejam nem grandes e nem pequenas[18] de um conjunto, do que quantidades que sejam ao mesmo tempo grandes e pequenas, isso é, parece que estamos nesse caso melhor preparados para dizer que "não é verdade que Grande parte dos A's são B's e nem é verdade que Pequena parte dos A's são B's".

Levemos em conta a negação interna dos quantificadores da linguagem natural "Grande parte" e "Pequena parte". Enquanto "Pequena parte dos alagoanos não são bairristas" nos indica que "Grande parte dos alagoanos são bairristas", "Grande parte dos alagoanos não são bairristas" não nos indica nada. Basta pensar no exemplo da eleição no início do capítulo, o fato de alguém ter "Grande parte dos votos", 40% em nosso exemplo, não indica que seu opositor tenha "Pequena parte" podendo mesmo ter mais votos. Ainda assim temos uma ordem escalar interessante que nos garante (Grande parte » Pequena parte) sem nenhuma garantia de (Pequena parte » Grande parte). É importante ressalvar duas coisas. Primeiro observe que estamos pensando somente em domínios finitos e segundo, nos casos em que afrouxamos nossos critérios para A e B possam ser vazios, por exemplo, quando aceitamos frases do tipo "Pequena parte dos extraterrestres são terraplanistas" como significativas, temos algumas situações interessantes. Uma "vantagem" nessa perspectiva é que se A sozinho, ou A e B juntos são vazios, as sentenças são falsas. A tal vantagem é que noção não colapsa com a não existência. Isso é, suponha um quantificador para "pequena parte", usemos $Q^{<\frac{1}{3}}$, mas a rigor essa observação não se restringe ao âmbito dos quantificadores proporcionais, e que a condição de verdade para sentenças com $Q^{<\frac{1}{3}}$ seja como em:

$$Q^{\frac{1}{3}}(x)(A, B) \text{ sse "pequena parte" dos A's são B's.}$$

Imagine uma estipulação não *straightforward* para "pequena parte" que torne a sentença verdadeira, dentre outras condições conjuntas, quando "$A \cap B \neq \emptyset$". Nesse caso, a estipulação torna a sentença falsa sempre que A ou B forem vazios, e essas são as condições em que a inexistência é verdadeira, se ela for definida como um quantificador primitivo. Por outro lado "pequena parte" não é necessariamente a negação da inexistência, o que tornaria "pequena parte" equivalente ao quantificador existencial clássico, pois os valores de verdade de sentenças com $Q^{\frac{1}{3}}$ dependem de outras condições, possivelmente não atendidas pelo existencial. É bem verdade que isso é uma condição mínima e não uma grande "vantagem" quando se define um quantificador, mas ao longo da seção tentamos pensar o máximo possível de possibilidades na construção desses quantificadores. Ainda assim, pensando um pouco fora da noção semântica modelística, é possível imaginar uma situação onde não considerar a condição descrita pode gerar confusão entre os significados dos quantificadores. A situação seria a seguinte, imagine que a alguém sem qualquer treino em lógica fosse apresentado o quantificador "pequena parte" restrito, onde se desconsidera

[18] O qual é o caso preciso de "a metade".

a falsidade do quantificador nos casos em que $A \cap B \neq \emptyset$. Que ao fazer isso alguém dissesse ao estudante caso contrário (isso é, $A \cap B = \emptyset$) o quantificador não tem sentido. Ao que o estudante muito poderia retrucar, "Não tem sentido quando *não existem* A's que são B's" e "só tem sentido quando existem A's que são B's". Arrastando os quantificadores para a meta-linguagem. É viável pensar, ainda que não tenhamos como demonstrar isso, que definir quantificadores usando a mesma ideia de quantificação na linguagem e meta-linguagem pode gerar circularidade Bem, existe, contudo, uma desvantagem legítima, pois casos problemáticos podem surgir em $Q_{<\frac{1}{3}}$ se B é vazio (mas A não) especialmente podemos gerar esquisitices verdadeiras como "Pequena parte dos homens são diferentes de si mesmo".

Já temos elementos suficientes para notar que não somente a associação não é boa, como um projeto desse tipo é inviável. No entanto, podemos encerrar essa crítica ressaltando a questão da fronteira de limite imprecisa entre um quantificador e outro. Pensar em "Quase todos" tendo como limite mínimo a mais de $\frac{2}{3}$ é aceitar uma porção de 67 como quase todos em 100, isso não parece ser consensual e percentualmente falando cada vez menos aceitável quanto maior seja a cardinalidade do domínio. Estratégias mais sofisticadas do que uma fixação de limite foram elaboradas, dentre elas podem se dar destaque à inclusão de ultrafiltros a estruturas em linguagens de primeira ordem.

2.2 Abordagens Lógicas de Quantificadores não Convencionais

De forma um tanto superficial faremos a exposição de trabalhos que identificaram, e tentaram lidar, com a falta de formalização dos quantificadores não-lógicos, ou determinantes a depender da interpretação. Apresentaremos aqui apenas os primeiros esforços e trabalhos que foram importantes na formação da nossa proposta.

2.2.1 Primeiras Propostas

Embora os trabalhos da década de 1970 de Richard Montague tenham sido o primeiro grande projeto de formalização de termos da linguagem natural, e em especial para o nosso caso, o seu paper *The Proper treatment of quantifiers in Ordinary English* de 1974, nosso ponto de partida é outro, fora da teoria de tipos. Em trabalho sobre o qual já falamos Barwise e Cooper (1981) apresentam uma abordagem bem abrangente sobre propriedades dos quantificadores em linguagem natural. No segundo parágrafo da introdução, os autores falam de dois pontos onde os quantificadores clássicos são inadequados no tratamento da linguagem natural: a incapacidade de expressar certos quantificadores; e a diferença entre as estruturas sintáticas das sentenças do cálculo de predicados e a das sentenças em linguagens naturais. Já tratamos esses dois problemas isoladamente no primeiro capítulo, e também levantamos, de certa forma, as vantagens

de um tratamento em uma teoria da Quantificação Generalizada. O que faremos como comentário geral do trabalho é destacar algumas ideias fundamentais que aprofundam essas vantagens, do uso de uma teoria da Quantificação Generalizada, e discutiremos criticamente o entendimento dos autores.

O primeiro ponto importante da abordagem dos autores é que: quantificadores correspondem a sintagmas nominais e não a determinantes. No texto, esse que é inclusive o título da subseção 1.3, dá a tônica da estrutura das sentenças que serão analisadas. Isso é, como já discutimos na introdução, termos que dão noção de quantidade como "todo", "algum" entre outros, não são quantificadores, mas partes componentes de quantificadores. Para explicar sua posição os autores apresentam um exemplo com "mais da metade"[19] e a impossibilidade de definir "mais da metade das flechas de John" pela interpretação mais próxima da estrutura sintática do Cálculo de predicados, que ele imagina, a saber, "mais da metade de todas as coisas". Barwise e Cooper (1981) acreditam que em "mais da metade" não é na verdade um quantificador, mas um determinante de um quantificador e na junção com uma expressão, que tenha como extensão um conjunto, uma *set expression*, aí sim pode ter uma estrutura sintática comparada a um quantificador. Como exemplo em "a maioria dos servidores está em greve" o quantificador não é "a maioria", mas "a maioria dos servidores".

O ponto mais importante aqui, nessa percepção estrutural, é que essa visão de quantificadores se limita a quantificadores de tipo $\langle 1 \rangle$. Com a proposta de adequação da estrutura sintática da formalização à estrutura sintática da linguagem, e no caso a aplicação imediata é um fragmento do Inglês, os autores tratam os próprios quantificadores com uma certa composicionalidade. Observemos, por exemplo, as regras de formação de sentenças quantificadas na linguagem proposta. Em primeiro lugar, uma *set expression* da linguagem natural, corresponde na formalização dos autores a um *set term* e qualquer símbolo de predicado ou qualquer fórmula aberta são *set terms*. Depois disso, se D é um determinante e η é um *set term*, $D(\eta)$ é definido como um quantificador. Só aí é possível construir uma fórmula quantificada, tendo, quando associamos a esse novo quantificador um *set term*, isso é, $D(\eta)\phi$. Levando em conta que η e ψ podem ser fórmulas abertas bem complexas essas fórmulas podem ter o tamanho que se deseje e inclusive já podem ser quantificadas.

É necessário dizer, mais uma vez, que essa forma de compreender a estrutura sintática das línguas naturais (com estrutura SVO), não é uma interpretação para quantificadores com estrutura tipo $\langle 1, 1 \rangle$. Essa é uma distinção importante a ser apresentada entre essa proposta e a proposta que traremos no capítulo 4. Além disso, essa não é a única forma de compor quantificadores, no lugar de interpretá-los, digamos, como átomos. Por exemplo, em Collins (2017) quantificadores como "todo estudante" podem ser com-

[19] *More than half.*

postos por modificadores escalares do tipo "quase", criando estruturas como "quase todo estudante", nós, por outro lado, compreendemos a expressão "quase todo(s)" como um quantificador.

A segunda, digamos, orientação metodológica adotada no texto é a perspectiva de que os quantificadores não são necessariamente termos lógicos (BARWISE; COOPER, 1981, p.162). Até mesmo alguns quantificadores matemáticos falham em ser lógicos. O termo "lógico" aqui significa invariável entre modelos. Nessa perspectiva, os autores estabelecem o que chamam de "hipótese do contexto fixo"[20] que vai servir exatamente para determinar o significado de algumas expressões variáveis. No caso aqui, essas expressões variáveis são os determinantes. Este recorte não é o mesmo que a nossa restrição de tratar apenas dos domínios do discurso que sejam finitos. Os autores pensam realmente em significados específicos para os determinantes e assim elaboram uma lógica, apresentam a aplicação no inglês, tratam propriedades, mas não definem os determinantes. A junção dessas duas ideias nos dão a impressão de que qualquer proposta de definição que venha a ser apresentada para quantificadores deste tipo tratarão de quantificadores locais.

A perspectiva de Barwise abre caminho para pensar com os métodos formais para além dos limites da lógica clássica, melhor dizendo, a própria teoria dos modelos é pensada fora desse limite. Em seu trabalho com Feferman (BARWISE; FEFERMAN; FEFERMAN, 2017) vários autores exploram a literatura existente até então sobre quantificação que não aquela em primeira ordem. Entre eles Matt Kaufmann (BARWISE; FEFERMAN; FEFERMAN, 2017, p. 123-176) abordando um quantificador matemático conhecido desde o surgimento da teoria das Quantificações Generalizadas o "Existe uma quantidade infinitamente grande[21]". O trabalho de Kaufmann traz um panorama interessante sobre quantificadores não standard que ele chama de "parentes" do quantificador "existe uma quantidade infinitamente grande", em especial um que ele remete a origem ao trabalho de Shelah (1975). Neste trabalho, Saharon Shelah tem como objetivo principal provar a existência de uma lógica mais forte do que uma lógica de primeira ordem (mesmo para modelos enumeráveis) que não perca a compacidade. Mas, entre outros resultados, Shelah presenta alguns quantificadores de segunda ordem. O que nos interessa é um que seria definido por um conjunto estacionário. Barwise, Kaufmann e Makkai (1978) estudam em detalhes a lógica desse quantificador, a lógica estacionária, e dizem que o quantificador deve ser lido como "para quase todos os conjuntos contáveis S". Este é o quantificador "aa".

O quantificador aa é um quantificador matemático e dentro de sua lógica $L(aa)$ é possível definir o quantificador "existe uma quantidade infinitamente grande"(BARWISE; KAUFMANN; MAKKAI, 1978, p. 171). Nós no entanto já deixamos claro que não temos

[20] *Fixed context assumption.*

[21] *There Exists Uncountably Many.* O estudo mais completo e a referência principal de uma lógica com este quantificador é Keisler (1970).

o interesse de tratar quantificadores matemáticos em nosso trabalho. A conclusão que pretendemos retirar deste breve histórico é que este pode ser o ponto de partida, ou a primeira tentativa, da definição da expressão "*almost all*" inclusive com o uso de ultrafiltros. Veremos abaixo tentativas de formalização dessa e de outras expressões quantificadoras mais focadas no uso na linguagem natural.

2.2.2 Definir quantificadores é como definir famílias

Uma vez que quantificadores são interpretados basicamente como famílias de conjuntos, definir quantificadores passa a ser algo como definir as propriedades que se deseja para tais famílias. Algumas propostas, em especial duas das quais falaremos aqui fazem isso de uma forma mais refinada para quantificadores não lógicos.

O primeiro exemplo está em Carnielli e Veloso (1997). Os autores têm como motivação na sua introdução do novo quantificador, uma lógica para o que eles chamam de "raciocínio sob incerteza". Com um copo de referências nessa tradição, os autores explicam que objetivo é deduzir a partir de sentenças que nem sempre são categóricas, como aquelas quantificadas com "todo"($\forall$) e algum $\exists$, mas sim daquela usadas na linguagem cotidiana com expressões como "geralmente", "usualmente" e "quase sempre". O que pode parecer à primeira vista uma saída do tema quantificação, na verdade é apenas uma interpretação quantificacional para esses termos, como notamos pela explicação de Peters e Westerst (2006) que vemos abaixo.

> É útil distinguir frases em linguagem natural, como as quantirelações e sintagmas nominais quantificados discutidas até agora, que expressam quantificação sobre objetos ou coisas mencionadas explicitamente, de outras expressões cujo significado pode envolver quantificação implicitamente, mas não o envolve explicitamente. As últimas expressões incluem uma ampla gama de itens que hoje em dia são comumente analisados em termos de quantificação. Por exemplo, o tempo passado pode ser analisado como quantificação existencial ao longo dos tempos anteriores ao presente. O modal deôntico **deve** pode ser analisado como quantificação universal em mundos possíveis nos quais todas as obrigações são cumpridas. O advérbio condicional **se** pode ser analisado como quantificação universal restrita a um conjunto de mundos possíveis nos quais a cláusula que subordina (o antecedente) é verdadeira. O verbo de atitude **acreditar** pode ser analisado em termos de quantificação universal sobre mundos possíveis, nos quais tudo o que um sujeito acredita é verdadeiro. E assim por diante.
> Essas expressões quantificacionais implicitamente têm em comum que as frases que as contêm geralmente não contêm junto uma expressão que denota explicitamente as entidades sobre as quais essas expressões quantificam implicitamente. Não é necessário que haja uma expressão denotadora de tempo em uma frase do pretérito[22] (PETERS; WESTERST, 2006, p. 15, tradução nossa).

[22] It is useful to distinguish natural language phrases like the quantirelations and quantified noun phrases discussed so far, which express quantification over explicitly mentioned things or stuff, from other expressions whose meaning may involve quantification implicitly, but does not involve it explicitly. The latter expressions include a wide range of items that are nowadays commonly analyzed in terms

Com isso a interpretação de "quase sempre" pode ser, sem grandes problemas, a mesma de "quase todo", com a ressalva de que o universo em questão é de eventos. Em seu trabalho, os autores dizem examinar um sistema lógico que captura a noção de intuitiva de '*most*'(CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 35), no entanto, o quantificador introduzido é o $\triangledown$ "quase todo". A nossa concepção é de que os autores não estavam de fato mirando na ideia de 'most', mas num significado bem específico deste termo no âmbito da teoria que eles chamam de *positive interpretation of generic reasoning*. Nossa percepção vem daqui:

> A ideia é a seguinte: para um indivíduo genérico p nós desejamos ter a capacidade de deduzir Q(p) a partir de **'Q(x) é assegurado para a maioria dos x (no universo P)'**. Tal p genérico pode ser considerado como um tipo representativo de indivíduos (em P). um exemplo é 'todo mundo é inocente até prova em contrário'. A partir de 'quase' todo mundo é inocente, nós desejamos concluir que uma pessoa genérica é inocente, sem comprometimento com a inocência de uma pessoa específica.
> Ao formalizar esse tipo de raciocínio – como uma extensão da lógica clássica de primeira ordem - **Nós desejamos capturar a intuição de 'maioria' presente na formulação original. Nós precisamos, é claro, clarificar uma consideração de 'quase todo'.** [23] (CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 37, grifo nosso. Tradução nossa.)

O termo '*most*' no primeiro grifo, de fato indica algo que é bem mais recorrente do que uma maioria simples. Algo que aconteça de fato com quase todos os elementos do domínio. O segundo grifo é ainda mais específico em dizer que a intuição de '*most*' é aquela presente na formulação original, que nós imaginamos se tratar do primeiro grifo. Por fim, não resta claro porque é necessário ter uma consideração sobre o que seria 'quase todo' para explicar o significado de 'maioria'/'maior parte' a não ser que se compreenda este '*most*' nesta acepção própria de, digamos em termos discutivelmente populares, "grande maioria". Em síntese o que queremos dizer é que a noção de "maioria" não se encerra da no entendimento de "quase todo". Uma explicação para esta aproximação entre '*most*' e '*almost all*' no trabalho pode ser que a lógica do '*most*' a que eles se referem é uma lógica

of quantification. For instance, the past tense may be analyzed as existential quantification over times preceding the present. The deontic modal must may be analyzed as universal quantification over possible worlds in which all obligations are complied with. The conditional adverb if may be analyzed as universal quantification restricted to a set of possible worlds in which the clause it subordinates (the antecedent) is true. The attitude verb believe may be analyzed in terms of universal quantification over possible worlds in which everything a subject believes is true. And so on. These implicitly quantificational expressions have in common that sentences containing them typically do not also contain an expression that explicitly denotes the entities over which these expressions implicitly quantify. There need not be any timedenoting expression in a past tense sentence.

[23] The idea is as follows: for a generic individual p we wish to be able to deduce Q(p) from **'Q(x) holds for most x (in universe P)'**. Such a generic p can be regarded as a kind of representative of the individuals (in P). An example is 'everyone is innocent until proof to the contrary'. From 'almost' everyone is innocent, we wish to conclude that a 'generic' person is innocent, without commitment to the innocence of a specific person.

In formalising this kind of reasoning - as an extension of classical firstorder logic - **we wish to capture the intuition of 'most' present in the original formulation. We need, of course, a clear account of 'almost all'**.

de expressões da categoria que eles classificam de "tipo" '*most*'. Esta ideia vem do fato de que Veloso (2002) chama frases como "*Birds 'generally' fly*" e "*Tweety is a 'typical' bird*" de *'most' assertions*. Em todo caso, o que nos interessa é como é definido o quantificador.

A ideia geral é simples. Dada a interpretação padrão para símbolos de predicado, de que suas extensões são conjuntos (de ênuplas ordenadas onde $n \geq 1$). Este conjunto será considerado **quase tão grande quanto o domínio**, e portanto "quase todo" o domínio, se seu complemento puder ser considerado **pequeno**, segundo algum critério. Obviamente algum critério preciso deve ser adotado na definição de "pequeno", antes de falarmos desse critério vejamos a explicação dos autores levando em consideração a frase "*Almost all birds fly*".

> No exemplo dos 'pássaros voadores', sendo B o universo dos pássaros e considerando o conjunto $F = \{b \in B : F(b)\}$ dos pássaros que voam. A abordagem que propomos para 'quase todos os pássaros voam' é 'F é quase tão grande quanto B'. Considerando que o universo B é 'grande', podemos reduzir 'F é quase tão grande quanto B' para simplesmente 'F é grande tal qual'. O complemento $F^c = \{b \in B : \neg F(b)\}$ (aves que não voam) pode ser considerado o conjunto de exceções. A intuição básica é que $F \subseteq S$ é 'quase tão grande quanto B' exatamente quando o conjunto de exceções F^c é 'pequeno' em relação a B.[24] (CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 37, tradução nossa)

Antes de mais nada, notamos que a definição de "pequeno" é sempre dada em relação a um conjunto e não corresponde a uma noção geral de pequeno, como aquela dada na definição "todo" do quantificador universal, por exemplo. Como dissemos no primeiro parágrafo o que se procura aqui é uma propriedade de uma família de conjuntos, especificamente, dado um conjunto X, a propriedade de uma família de subconjuntos de X. Diretamente falando esta propriedade é a de ser um *Ideal* (VELOSO, 2002, p. 195). A definição de *Ideal* é a seguinte.

2.2.2.a Seja X um conjunto não vazio, um ideal sobre X é um conjunto $\mathcal{I}$, subconjunto do conjunto potência $P(X)$, com as seguintes propriedades:

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii) Se $B \in \mathcal{I}$ e $A \subseteq B \subseteq X$, então $A \in \mathcal{I}$

[24] In the example of flying birds, let B be the universe of birds and consider the set $F = \{b \in B : F(b)\}$ of birds that fly. The account we propose for 'almost all birds fly' is 'F is almost as large as B'. By considering the universe B to be 'large', we can reduce 'F is almost as large as B' to simply 'F is as large'. The complement $F^c = \{b \in B : \neg F(b)\}$ (non-flying birds) may be regarded as the set of exceptions. The basic intuition is that $F \subseteq S$ is 'almost as large as' B exactly when the set F^c of exceptions is 'small' with respect to B.

iii) Se $A \cup B \in \mathcal{I}$, então $A \in \mathcal{I}$ *e* $B \in \mathcal{I}$

Assim, fica estabelecido que um conjunto Y é pequeno com relação a um outro X, se Y faz parte da família de conjuntos, subconjuntos de $P(X)$, com a propriedade de ser um Ideal de X. Dessa forma, definir "quase todo" é definir a família de conjuntos correspondente ao complemento (^{c}) de cada $Y \in \mathcal{I}$. Esta é a definição de um Ultrafiltro.

2.2.2.b Filtro - Seja S um conjunto não vazio, um filtro sobre S é um conjunto $\mathcal{F}$ subconjunto do conjunto potência $P(S)$ com as seguintes propriedades:

i) $S \in \mathcal{F}$

ii) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq S$, então $B \in \mathcal{F}$

iii) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$

iv) Se $\emptyset \notin \mathcal{F}$ dizemos que $\mathcal{F}$ é um filtro próprio de S.

Definido um filtro[25] (próprio) a seguinte cláusula extra define um Ultrafiltro - seja $\mathcal{F}$ um filtro próprio de S, $\mathcal{U}$ é um Ultrafiltro de S se e somente se:

v) Para qualquer $A \subseteq S$, ou $A \in \mathcal{U}$ ou $(S - A) \in \mathcal{U}$

Definido um ultrafiltro, os autores apresentam uma estrutura para seu quantificador ∇ e sua cláusula nas definições de verdade. A estrutura seria o seguinte trio ordenado $\mathcal{M} = \langle M, I, \mathcal{U} \rangle$, onde $\langle M, I \rangle$ é uma estrutura de primeira ordem e $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro no domínio M. A definição de verdade de uma sentença com o quantificador ∇ "Quase Todo", na forma $\nabla x(\phi(x))$ é a seguinte:

$$\mathcal{M} \models \nabla x(\phi(x)) \text{ sse } \phi^{x,\mathcal{M}} \in \mathcal{U}$$

[25] A rigor apenas i, ii e iii são necessários na definição de Ultrafiltro.

Não nos alongaremos no exame da lógica com este quantificador, no entanto faremos algumas observações antes de apresentar uma outra abordagem de implementação de quantificadores não lógicos. Entendemos como uma limitação – não para os fins dos autores, mas para os nossos em particular – o fato de os autores apresentam um quantificador tipo $\langle 1 \rangle$. No nosso ponto de vista, isso quer dizer que o quantificador carregará sempre um domínio específico em sua definição, nesse sentido o quantificador tem alguma aproximação com os quantificadores de Barwise e Cooper. Além disso, a definição em termos de ultrafiltros interpreta um "quase todos" com limite de aproximação ao domínio, mas sem limite mínimo. Essa observação pode parecer muito confusa, mas usando uma analogia própria dos autores, o que este quantificador diz é que um subconjunto X é quase tão grande quanto o seu domínio, podendo mesmo ser igual ao domínio. E a problemática aqui é que podem haver interpretações de "quase todos" para conjuntos que não são "quase tão grandes quanto o domínio" ou ainda que não têm como complemento um conjunto tão pequeno quanto um Ideal do domínio. Uma vez que não se pode dizer 'em que porção exata do domínio' começa a ser relevante dizer "quase todo", como vimos no início deste capítulo, parece ser tentador dar uma definição digamos, aproximativa tendo como referência o "todo". Isso não quer dizer que se tenha capturado todo significado da expressão nesta interpretação, ou mesmo o mínimo necessário para que se possa dizer que aquele quantificador representa aquela expressão.

Como os autores dizem, o quantificador ∇ tem um significado "intermediário" entre $\forall$ e $\exists$ (CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 38). Veremos que uma série de outras lógicas serão pautadas nessa perspectiva o que, na verdade, já é uma maneira de tratar os quantificadores de modo escalar[26]. O que isso significa é mais explícito verificando os axiomas, referentes às propriedades dos ultrafiltros, e fórmulas demonstráveis a partir destes axiomas. Embora entre Carnielli e Veloso (1997) e Veloso (2002) exista uma pequena diferença no conjunto de axiomas, ambos trazem como axioma:

$$\nabla x(\phi(x)) \rightarrow \exists x(\phi(x));$$

e como uma fórmula demonstrável

$$\forall x(\phi(x)) \rightarrow \nabla x(\phi(x))$$

É esse o sentido de "intermediário" ($\forall$ » ∇ » $\exists$). Nossa concepção, levando em conta sempre uma visão pré-semântica, no sentido debatido no primeiro capítulo, é que esta abordagem pode levar a entender o quantificador ∇ como "qualquer coisa entre todo e algum". É certo que um ultrafiltro pode ser interpretado como "quase tão grande quanto o domínio", mas esta consideração sobre axiomas e teoremas pode ser significativa. Veja

[26] Noção que conheceremos melhor nos capítulos 3 e 4.

como outro exemplo a seguinte fórmula que segundo os autores é demonstrável nesta lógica((CARNIELLI; VELOSO, 1997, p. 40), (VELOSO, 2002, p. 210)).

$$\neg\nabla x(\phi(x)) \leftrightarrow \nabla x\neg(\phi(x))$$

O comportamento do quantificador possibilita, em domínios finitos, que a metade seja interpretada como "quase todo". Para a sentença $\neg\nabla x(\phi(x))$ considere o modelo em que a extensão de $\phi(x)$ corresponda à metade do domínio, não parece o caso de dizer que "quase todos não são $\phi(x)$", isto é $\nabla x\neg(\phi(x))$. Mais uma vez esse não é um problema, necessariamente, da teoria em questão e pode nem mesmo ser relevante aos objetivos dos autores. Isso, no entanto, nos levanta uma dificuldade relativa à associação do significado do quantificador ao significado da expressão quantificadora "quase todo".

2.2.2.1 Modulando uma ideia

É provável que ainda hoje a mais completa generalização das ideias de Carnielli e Veloso (1997) esteja no trabalho de Maria Cláudia Cabrini Gracio (1999). Lá a ideia de elaborar lógicas dos quantificadores não lógicos traduz perfeitamente o que dissemos na abertura da subseção 2.2.2. Isso é, uma vez que a extensão de um quantificador é uma família de subconjuntos do domínio, definir um quantificador é simplesmente definir as propriedades de uma família[27]. Ao conjunto de lógicas elaboradas por Grácio se dá o nome de Lógicas Moduladas.

Das Lógicas Moduladas, nós estamos interessados em algumas de suas instanciações em particular, e mais do que isso, no significado dos quantificadores nestas lógicas. Nosso interesse se deve ao fato de que não estamos em disputa pela melhor versão de qualquer lógica, mas buscando definições para quantificadores. Isso naturalmente não nos impede de buscar, como já fizemos, o significado dos quantificadores em sistemas lógicos no âmbito do conjunto derivações de uma lógica qualquer ou de seu conjunto axiomático. Pensando assim, antes de discutir brevemente os sistemas de Grácio com quantificadores similares aos que tratamos em nossa proposta, observe os dois axiomas abaixo[28] da teoria geral das Lógicas Moduladas.

$$Qx\phi(x) \rightarrow \exists x\phi(x)$$
$$\forall x\phi(x) \rightarrow Qx\phi(x)$$

O quantificador Q ter um significado "intermediário" entre os quantificadores lógicos aqui nos parece mais plausível do que na lógica de Veloso e Carnielli, isso porque Q ainda

[27] Para quantificadores de tipo $\langle 1\rangle$, pelo menos.

[28] Os axiomas correspondem respectivamente aos axiomas 3 e 4 apresentados no esboço de uma teoria geral das lógicas moduladas em Gracio (1999, p. 162)

vai ganhar um significado mais preciso de acordo com as propriedades do conjunto (ou família de conjuntos) que está em sua extensão. Isso é, de forma geral, Q é precisamente "qualquer coisa entre todo e algum". Passemos aos quantificadores especificamente.

O trabalho de Gracio (1999) apresenta especificamente uma lógica para o quantificador "G" para a expressão "muitos", uma para o quantificador "M" para a expressão "a maioria" e uma para o quantificador "P" para a expressão "boa parte" que a autora também chama de lógica do plausível. Há, no entanto, uma gama de trabalhos posteriores implementando quantificadores (com novas lógicas, como a lógica do poucos), apresentando métodos dedutivos, provando propriedades dos sistemas e apresentando aplicações demonstrando que essa abordagem, ao menos no Brasil, foi muito bem sucedida. Existe também uma rede de alunos e coautores, dentre os quais o destaque, especialmente pela manutenção mais recente da produção sobre o tema, está nos trabalhos professor Hércules Feitosa. De tal modo que podemos dizer que esta abordagem tem uma escola.

O quantificador "M" neste trabalho é uma interpretação de 'Maioria'[29] ao qual Grácio dedica o quarto capítulo da tese. Antes iniciar o capítulo, porém, na última página do capítulo 3 ((GRACIO, 1999, p. 75)) diz que o quantificador será, sintaticamente, formalizado mediante a proposta de Rescher (1962). Como já argumentamos na seção 1.2, o quantificador de Rescher tem algumas limitações em uma série de traduções, o que não quer dizer que a definição de "M" não seja adequada ao projeto específico das lógicas moduladas, mas provavelmente quer dizer que ela, a definição, não é a mais compatível com o nosso uso da expressão 'A maioria'.

O quantificador P, "boa parte" (suficiente, razoável) se assemelha, inclusive nas propriedades apresentadas pela autora, a uma expressão que nos interessa: "grande parte". A família de conjuntos na extensão de P tem a propriedade de ser uma topologia reduzida tratada por Grácio na seção 6.2 de sua tese. Essa estrutura, segundo a autora, seria o suficiente para definir o quantificador. Depois de apresentados os axiomas são demonstrados três teoremas desta lógica(GRACIO, 1999, p. 145), entre eles o seguinte .

$$Px\phi(x) \to \neg Px\neg\phi(x)$$

Numa tradução rápida, interpretando $\phi(x)$ como "x votou no atual presidente" (num universo de eleitores onde), lemos o teorema da seguinte forma: "Se boa parte dos eleitores votou no atual presidente, então não é verdade que boa parte dos eleitores não votou no atual presidente". Imagine que a realidade é de uma disputa 49% contra 51% para o vencedor, como num exemplo que já demos. É possível concordar com o antecedente e discordar do consequente sem maiores problemas. Isso é, essa noção de "boa parte" é preparada na verdade para quantidades maiores do que a metade do domínio. Desta forma,

[29] Diferentemente do uso que é feito em Grácio, Feitosa e Nascimento (2006), por exemplo.

não é o tipo de interpretação que desejamos para a expressão "grande parte" ou "boa parte".

Por fim, G é o quantificador usado para "muitos", e tratado isoladamente posteriormente em Grácio, Feitosa e Nascimento (2006) como "M". Neste quantificador a família de conjuntos que é sua extensão tem a propriedade de ser o que eles chamam de *Família Própria Fechada Superiormente* (FPFS). Uma FPFS é definida da seguinte forma.

Dado um domínio A uma FPFS de A é um conjunto F_s tal que $F_s \subset P(A)$ e:

i Se $B \in F_s$ e $B \subseteq C$, então $C \in F_s$.

ii $A \in F_s$.

iii $\emptyset \notin F_s$

Segundo os autores esta família de conjuntos deveria ser sucedânea às seguintes propriedades da expressão "muitos": a) se muitos indivíduos do universo satisfazem uma sentença ϕ e a extensão ϕ^x está contida em ψ^x, então a sentença ψ também é satisfeita por muitos indivíduos do universo; b) se muitos indivíduos do universo satisfazem uma sentença ϕ, então existe alguém que satisfaz ϕ; c) o conjunto universo contém muitos indivíduos. E então os autores afirmam:

> Com esta concepção, o conceito de "muitos" pode ter variações contextuais e não exige algum tipo de quantificação. Não exige, por exemplo, que valha para mais da metade dos indivíduos do universo de discurso, ou para uma certa parte deles, claramente especificada. (GRÁCIO; FEITOSA; NASCIMENTO, 2006, p. 25)

Aqui vemos a preocupação dos autores com a propriedade que desejávamos para o quantificador P, a saber, que seja significativo inclusive quando se tratar de uma quantidade menor do que a metade. O problema desse sistema específico fica a cargo da autocrítica dos próprios autores "... estrutura matemática proposta para interpretar 'muitos', a FPFS, traz condições necessárias para interpretar 'muitos', mas não suficientes." (GRÁCIO; FEITOSA; NASCIMENTO, 2006, p. 26). E com o seguinte contraexemplo deixam claro como a proposta foge da intuição do quantificador: "Agora, seja $A = \{a_1, a_2, ..., a_{100}\}$. Do mesmo modo $P(A)$ - $\{\emptyset\}$ é uma FPFS e $\{a_1\}$,..., $\{a_{100}\} \in P(A) - \{\emptyset\}$" (GRÁCIO; FEITOSA; NASCIMENTO, 2006, p. 26). No exemplo conjuntos unitários pertenceriam a famílias próprias fechadas superiormente, e assim poderiam denotar 'muitos' o que não faz sentido.

Podemos com essa dificuldade final encerrar este capítulo, mas somaremos ainda uma crítica ao último sistema. Nossa intuição é de que esta noção, a noção de "muitos" não foi bem formalizada porque, dentro da pretensão dos autores de que o conceito se

mantenha o mesmo em meio a "variações contextuais", isso é impossível de se realizar. Veremos no próximo capítulo como uma abordagem extra-lógica pode oferecer *insights* na definição de quantificadores. Ao fim do capítulo nossa posição quanto às dificuldades na formalização de "muitos" deverá se mostrar um tanto mais clara.

3 PRAGMÁTICA E PROBLEMAS SIMILARES

Iniciaremos este capítulo com uma motivação um tanto distinta do restante da tese. O nosso objetivo ao longo do capítulo 3 é beber em outras fontes de explicação sobre problemas que se associam às dificuldades que encontramos na definição de termos quantificadores. Aqui discutiremos alguns conceitos de filosofia da linguagem, especialmente no paradigma da pragmática, mas não nos proporemos a responder problemas dessa área, senão a entender como esta tradição pode ser profícua na resolução dos problemas que estamos apresentando. Três questões centrais serão levantadas aqui divididas em duas seções principais. Na primeira seção abordaremos a imprecisão e os pontos serão a vagueza, sob a perspectiva da análise de termos sortais, e a ambiguidade, levando em conta a indexicalidade e sensibilidade ao contexto. Na segunda seção o tema central será as chamadas implicaturas conversacionais, no escopo da teoria que favorece o aparecimento das escalas de Horn, que entendemos como instrumento de precisificação. Essas ideias também serão tratadas em conjunto na busca de uma abordagem para definição de quantificadores.

3.1 IMPRECISÃO

O termo 'impreciso', como contrário de 'preciso', pode significar muita coisa, pois pode-se ser impreciso de muitas maneiras, mas preciso de apenas uma. A questão é que classificar algo (no nosso caso uma expressão) como impreciso com um viés negativo pode nos atrapalhar um pouco. Isso porque ao descartar expressões imprecisas se torna difícil dizer em que nível elas poderiam ser precisificadas ou ainda em que medida a imprecisão é importante para o sentido da expressão. O ponto paradoxal é que estamos dando importância a tratar com precisão, ou pelo menos atuar com mais rigor, o debate sobre a imprecisão. O que queremos destacar é que em explanações pouco rigorosas sobre a imprecisão é natural apresentar "vagueza" e "ambiguidade" como seus sinônimos. Ou melhor, generalizar como imprecisa qualquer expressão, seja ela vaga ou ambígua. Em textos de semântica, pensamento crítico ou teoria da vagueza, no entanto, o mais corriqueiro é iniciar essa apresentação com uma distinção entre esses dois termos. Trabalhos com objetivos distintos como Chierchia (2003), Carnielli e Epstein (2010) e Santos (2015) apresentam a noção equivalente de que: enquanto uma sentença ambígua possui mais de um significado (valor de verdade ou análise semântica) possível, uma sentença vaga, por outro lado, sequer possui um significado ou valor de verdade bem definido e incontroverso.

Observe a frase imprecisa abaixo.

3.1.a Na solidão irremediável se unem todos os viventes.

Há aí ao menos duas interpretações possíveis. Uma primeira de que a solidão une essas pessoas de fato e fisicamente, uma outra, de que os tais "viventes" compartilham da mesma propriedade, a solidão. A ambiguidade aqui depende um pouco mais do arranjo entre as palavras do que das palavras escolhidas, é estrutural. Isso é, estamos dizendo que certos arranjos sintáticos, que podem ser aceitos em uma linguagem, possibilitam mais de uma interpretação e que a prioridade de escolha sobre qual dos dois é o sentido relevante se dá pelo contexto. Existe também uma outra possibilidade de dependência de um contexto para além do arranjo sintático. Confusões podem acontecer pela dependência ao contexto no uso de um termo individualmente. Vamos a um outro exemplo. Popularmente no Brasil o termo "cachorro" é utilizado como sinônimo de "infiel", alguém pode provocar uma mudança dos usos desse termo e elaborar o seguinte raciocínio insidioso:

3.1.b Todo homem é cachorro. Por triste que seja, essa é uma máxima com a qual mesmo o tolo, o homem, pode concordar. É sabido, no entanto, que quando uma pessoa nobre jura, só pode jurar por algo que ainda é mais nobre que si mesmo. Ninguém pode contestar a nobreza de Sócrates. Pois o próprio Sócrates, no Fedro de Platão, jura pelo cão. Isso acontece porque o cachorro é um animal fiel, e por isso símbolo da fidelidade. De tudo que foi dito podemos concluir que os homens são de fato fiéis.

Desconsiderando que esse argumento é falacioso em alguns outros sentidos, podemos identificar como centro da confusão o fato de que o termo "cachorro" é usado em duas acepções diferentes. O que se pretendia aferir aos homens inicialmente, com respeito à sua infidelidade, acaba por se degenerar na conclusão, gerando efeito exatamente oposto ao desejado no primeiro uso. Observe aqui que temos modos um tanto quanto diretos de remediar os problemas de **3.1.a** e **3.1.b**. No primeiro exemplo, se o significado desejado é metafórico basta dizer que poeticamente o desejável era falar em "união de corações" ou partilha de sentimentos. Caso contrário é possível especificar em que lugar se unem os tais "viventes". Identificar o erro em **3.1.b**, no entanto depende de dizer qual é o significado atribuído ao termo nos dois casos, aquele popular sinônimo de "cafajeste", "canalha" e "infiel" ou se o contexto da frase determina que se está falando do animal amigo do homem. A resolução do problema pode não ser tão simples com qualquer termo impreciso. Vejamos o caso da vagueza.

Para instanciar a vagueza, tomemos o termo "jovem" que pode ser considerado vago à medida que não temos uma 'fronteira precisa'[1] para a qual se possa estabelecer que a partir daquele momento alguém deixa de ser jovem e passa a ser velho. Nesse sentido frases como **3.1.c**, abaixo, ajudam a esclarecer os efeitos da vagueza.

3.1.c Uma vez que ele é jovem hoje, também será amanhã pela manhã.

Parece que essa sentença é aceitável em qualquer dia em que se possa dizer que uma pessoa é jovem, mas a medida em que dizemos isso de alguém, que de fato é jovem, essa frase passa a valer daí para frente por toda a vida desta pessoa, incluso quando não for mais, consensualmente, jovem. A falha de raciocínio produzida por esse tipo de imprecisão é classicamente apresentada por um paradoxo indutivo chamado sorites. Abaixo uma estruturação informal do que seria o paradoxo sorítico para o termo "jovem", onde 'h' representa o momento de nascimento de alguém e 'n' é o número de dias vividos por Matusalém.

Tabela 3 – 3.1.d

1. João é jovem no momento h.	(Base)
2. Se alguém é jovem no momento h, ainda será no momento h + 1.	(Hipótese Indutiva)
3. João é jovem na data h + 1.	(Modus Ponens 1, 2)
4. Se alguém é jovem no momento h + 1, ainda será no momento (h + 1) + 1, isso é, h + 2.	(Hip. Ind.)
5. João é jovem na data h + 2.	(MP. 3 e 4)
.	
.	
.	
(n + n) + 1. João é jovem na data h + n.	(MP. (n + n) - 1, (n + n))

A unidade somada pode ser "segundo", "minuto", "hora" ou mesmo "dia". O certo é que na indução não tem uma linha de corte e a Hipótese Indutiva pôde ser aplicada até a penúltima linha. Não parece haver problema dedutivo e nem no princípio de indução, no entanto é estranho observar na conclusão do argumento que mesmo João somando todos os dias (ou como dissemos, momentos) de vida de Matusalém, o qual segundo a bíblia teria vivido em anos 969, ele ainda é jovem, em razão dessa indução. Tendo o paradoxo sorítico como um dos motivadores, muitas teorias da vagueza foram apresentadas. Na próxima seção discutiremos algumas dessas teorias seguindo de perto a exposição de Santos (2015).

[1] Aqui usamos variações de "ter fronteiras imprecisas" como tradução do termo corrente "*borderline cases*" que define vagueza em genericamente em muitos trabalhos. Aqui nós pegamos emprestado especificamente de Shapiro (2006, p. 1).

3.1.1 Teorias da Vagueza

O paradoxo que expusemos acima foi apresentado pela primeira vez por um grego chamado Eubulides e ficou conhecido como problema do monte. No caso se tratava do problema de transpor de grão em grão todo o monte Olimpo. Hyde e Raffman (2018) explicam que vem daí a origem da palavra sorites, pois em grego *soros* é o termo para "monte". Na verdade, segundo Shapiro (2006), os termos monte – *heap* –, careca ou calvo – *bald*, devido ao célebre exemplo de Russell – e as cores são os exemplos paradigmáticos no debate sobre vagueza. Sobre cores é fácil notar o que gera vagueza em nossa classificação. Numa paleta de cores diferentes tons de azul podem em um determinado instante trazer insegurança sobre se aquela cor é, ainda, de fato azul. Ou pode haver, como há com uma certa normalidade, um desacordo sobre se a cor dos olhos de uma pessoa é azul ou verde. Essa discordância ou imprecisão é provocada pelos casos de fronteira. Dummett (1991, p. 73, 74), apresenta o que ele chama de afinação[2] de predicados em uma determinada semântica que contenha predicados vagos. A proposta de Dummett é que numa semântica desse tipo se crie para cada predicado vago, como o predicado de cor 'vermelho' um predicado relacionado, que ele chama de 'afinador aceitável' como referência. Dummett então propõe que para 'vermelho' esse predicado seja 'ruge' e dá as seguintes condições para que ele seja de fato um 'afinador aceitável' para 'vermelho':

> ... (i) 'ruge' é um predicado com uma aplicação completamente determinada, (ii) tudo que é definitivamente vermelho é ruge, (iii) nada que definitivamente não é vermelho é ruge, e (iv) tudo que se aproxima mais de algo que é definitivamente vermelho do que o faz de alguma coisa que é ruge, é ela mesma ruge. (DUMMETT, 1991, p. 73, tradução nossa.)[3]

A vantagem de tal interpretação é que ela preserva a lógica subjacente à medida que não interfere, ao menos aparentemente, no significados das constantes lógicas. Por outro lado, o próprio Dummett reconhece o desafio em se considerar um conjunto de 'afinadores aceitáveis' que não gere um problema para a interpretação dos próprios afinadores. No exemplo de Dummett, um conjunto de 'afinadores' que além de 'ruge' para 'vermelho' tivesse 'rose' para 'rosa' lamentavelmente nos conduziria a outros casos de fronteira imprecisa, onde não se poderia decidir entre 'ruge' e 'rosa'. Enquanto associado a um predicado, o 'afinador' parece ser um predicado de segunda ordem, e o problema apresentado por Dummett é que para casos de fronteira criados na elaboração desse conjunto de predicados de segunda ordem, os afinadores dependeriam de um conjunto de predicados de terceira ordem.

---

[2] *Sharpening*

[3] "...(i) 'rouge' is a predicate with a quite determinate application, (ii) everything that is definitely red is rouge, (iii) nothing that is definitely not red is rouge, and (iv) everything that more nearly matches something that is definitely red than does some given thing that is rouge is itself rouge."

Outra alternativa, menos preocupada em manter fixo o significado das constantes lógicas, é proveniente de lógicas multivaloradas ou teorias plurivalentes. Uma lógica trivalente, por exemplo, aceita além dos valores de verdade clássicos verdadeiro (V) e falso (F) para proposições o valor indefinido ou indeterminado (I). Sendo assim, qualquer caso de fronteira em alguma linha ímpar (uma conclusão de Modus Ponens), exceto a base, da indução (**3.1.d**) onde não se possa decidir se é verdadeira ou falsa, podemos dizer ser indefinida. Dentro da fronteira imprecisa da indução (**3.1.d**) muitas linhas impares são indefinidas e com elas as hipóteses indutivas instanciadas na forma de implicação. Uma vez que uma instância da hipótese indutiva, na forma de uma implicação, em uma dada linha tem valor de verdade (I), a aplicação de MP é inviabilizada e o argumento como um todo se torna falacioso e não mais paradoxal. Contudo, o custo para a resposta dada pela lógica trivalente é muito alto. Com a inclusão do valor (I) fórmulas válidas (como $A \to A$) e contraditórias (como $A \wedge \neg A$) na lógica clássica passam a ter casos que simplesmente não podemos definir, mais do que isso, não se trata de uma decisão por quais princípios são derrogados ou assumidos, como outras lógicas não-clássicas o fazem, se trata de uma opção por abrir mão de verdades e falsidades lógicas. Santos (2015) aponta, no entanto, outro problema como central nessas teorias:

> ...parece que a teoria trivalente mais não faz do que substituir a fronteira clássica entre verdadeiro e falso, considerada inaceitável, por duas outras fronteiras: uma entre o verdadeiro e o indefinido, e outra entre o indefinido e o falso. Mas o problema não estava no número de fronteiras, mas na impossibilidade de elas serem precisamente definidas. Ora, a teoria trivalente parece traçar uma fronteira exacta entre os casos verdadeiros e os casos indefinidos e outra fronteira exacta entre os casos indefinidos e os casos falsos. Mas então o problema recoloca-se: parece que existem, ou pelo menos poderiam existir, casos que nem são claramente verdadeiros nem claramente indefinidos, mas que se situam algures entre as duas categorias. (SANTOS, 2015, p. 6)

O autor observa ainda que uma proposta de implementação de mais dois valores entre 'V' e 'I' e entre 'I' e 'F' só ampliaria a quantidade de casos fronteiriços. Uma proposta dessa natureza, no entanto, não nos parece aceitável, por uma outra razão. Dada uma lógica trivalente do valor indefinido 'I' parece que já dispomos de todos os casos não decidíveis entre 'V' e 'F' e as circunstâncias supostamente indefiníveis entre os valores 'V' e 'I' são, trivialmente, indefiníveis. Em todo caso o argumento vale para o caso em que fosse possível acrescentar indefinidamente valores de verdade entre as lacunas na expectativa de diminuir a vagueza.

Duas outras abordagens possíveis, menos puristas com respeito à questão semântico-linguística, são o Espistemicismo e o Contextualismo . O Epistemicismo abandona a querela semântica elaborada por outras correntes ao tomar o pressuposto de que um predicado vago não é mais do que vago, e como tal não pode ser clarificado ou precisificado por uma barreira epistêmica, o limite de fronteira entre o jovem e o não jovem é imperceptível. O

Epistemicismo não propõe, como as lógicas plurivalentes, que exista, então, uma fronteira indeterminada na aplicação de um predicado para o qual se atribui o valor de verdade 'I', mas apenas que no limite entre 'V' e 'F' existem casos sobre os quais não podemos opinar de forma justificada, senão, "acertar" ou "errar" sobre a aplicação de um predicado por palpite. O Contextualismo, por outro lado, alega que há variação de extensão dos predicados vagos devida a variação do contexto, e essa seria a razão para a indução (**3.1.d**) ter premissas verdadeiras e a conclusão falsa, a mudança do significado do termo "jovem" nos diferentes contextos produzidos nos passos da indução. Isto é, o argumento **3.1.d** e qualquer versão dele, nessa avaliação, é inválido. Para o contextualista, só a falta de percepção sobre a mudança da extensão do termo vago pode fazer alguém pressupor que a indução não tem problemas. Uma indução análoga ao paradoxo sorítico apresentada por Sorensen (2018) e chamada por ele de sofismo indexical, evidencia a mudança de significado de um termo vago como ela é vista pelo contextualista.

1. **Base:** O horizonte está a mais de um metro de distância.
2. **Hipótese Indutiva:** Se o horizonte está a mais de 'n' metros de distância, então ele está a mais de 'n + 1' metros de distância.
3. **Conclusão:** O horizonte está a mais de um bilhão de metros de distância.

Sorensen observa que se a circunferência total da terra é de "apenas" quarenta milhões de metros e o argumento leva a uma conclusão absurda. No entanto, o horizonte é 'o encontro da terra com o céu' e em cada ponto de uma caminhada o horizonte é distinto, por óbvio, devido à mudança do contexto pelo qual passa o termo indexical "horizonte". A interpretação do contextualista é que: somente uma tentativa forçosa de manter fixo o significado do termo 'horizonte', como o que foi feito com o termo 'jovem' em **3.1.d**, é capaz de provocar a falsa sensação de que o argumento é válido e de que existe, de fato, um paradoxo nos argumentos similares ao sorites. Uma outra abordagem sobre a vagueza de um termo é a partir de seu oposto, isso é, um termo, digamos predicativo, sobre o qual se pode decidir para cada elemento do domínio se está ou não na extensão daquele predicado. Um termo não vago é também chamado de Sortal.

3.1.2 A Precisão Sortal

Abriremos um parêntese para falar sobre precisão, ao invés de imprecisão. Nosso objetivo aqui não vai muito além de observar que a precisão não está numa posição tão privilegiada quando se trata de definição. Um predicado não vago é muitas vezes classificado como Sortal. As abordagens históricas normalmente dão conta de que o termo "sortal" teve sua primeira citação feita por John Locke e que tem uma estreita relação com o conceito aristotélico de "segunda substância" (LOWE, 2009, p. 1), (WALLACE, 1965, p.

9) mas que o período de maior debate sobre o termo foi a década de 60, com a participação de Strawson, Quine e Peter Geach e, posteriormente, David Wiggins (GRANDY, 2016). Wallace (1965, p. 9) destaca que Frege dedicou dois parágrafos a predicados sortais em seus fundamentos da aritmética. Nessa seção além de uma breve apresentação desse conceito colocaremos em questão o quão pode ser vago ou controverso o conceito que classifica predicados, conceitos ou expressões como precisos.

McKeon (2010, p. 50) define uma propriedade como sendo sortal se ela nos fornece um critério para sua aplicação, um para individuação das coisas que recebem tal propriedade e também um critério de identidade. Parece que podemos definir que um determinado jovem é ele mesmo e não outro, assim como parece possível definir se há exatamente um jovem em um determinado espaço ou não. Contudo, o exemplo em **3.1.b** nos faz evidenciar uma certa dificuldade em aplicar o termo "jovem" com exatidão. É viável imaginar que a falta de um critério de aplicação para um predicado, tornando esse predicado não sortal, é o que faz com que o raciocínio em cadeia sobre esse termo gere um paradoxo sorítico. Já Grandy (2016), numa exposição mais ampla e focada numa revisão da literatura sobre o termo, afirma que existem ao menos seis maneiras diferentes de distinguir sortais de não sortais na perspectiva de diferentes filósofos.

3.1.2.a Como critério de contagem dos itens de uma classe.
3.1.2.b Como critério de identidade e diferença entre itens da mesma classe.
3.1.2.c Como critério de existência continuada dos itens de uma classe.
3.1.2.d Respondendo a questão "o que é isso?" para coisas de uma classe.
3.1.2.e Especificando a essência das coisas de uma classe.
3.1.2.f Como não sendo aplicável para partes de coisas dessa classe.

Grandy segue apresentando certas conexões existentes entre essas definições. Entre 3.1.2.a e 3.1.2.b pois um critério de identidade é necessário para a contagem (sem repetição) dentro de uma classe; entre 3.1.2.a, 3.1.2.b e 3.1.2.f uma vez que se os itens de uma classe e suas partes contarem juntos como unidades nós não alcançamos um critério de "indivisão" que deixe claro quantas unidades conta um mesmo item; 3.1.2.c, 3.1.2.d e 3.1.2.e se relacionam pela noção de essência, primeiro como o que define realmente uma coisa, respondendo assim "o que é isso?" (3.1.2.d), depois como aquilo sem o qual algo não existe, isso é, se uma característica é parte da essência de um item não se pode imaginar que ela falte em um item sem que ele deixe de existir (3.1.2.c). A terceira fornece uma conexão entre as 3.1.2.a, 3.1.2.b, 3.1.2.d e 3.1.2.e pois saber se alguma coisa existe em um tempo é importante para sua contagem em um instante apenas ou "ao longo do tempo".

Outras conexões podem ser observadas para além dessas já estabelecidas por Grandy. De fato, ainda que as definições sejam distintas, e tenham distintas motivações, elas pretendem definir o mesmo e por isso talvez o mais interessante seja entender, na realidade, em que elas são distintas. Primeiro "O que é isso?" é um questionamento muito

genérico e pouco técnico que pode devolver como respostas inclusive termos vagos. Para adaptar o exemplo de Grandy sobre a diferença entre as definições 3.1.2.c e 3.1.2.d, observe que para um "bezerro", por exemplo, é possível traçar um critério de existência continuada que nos diga que aquele animal catalogado no primeiro instante de vida é o mesmo do dia de sua morte, esse critério pode ser dado pela marca a brasa, no entanto, ao longo da vida do animal não teremos uma resposta fixa para a pergunta "o que é isso?" quando o objeto em questão é "um bezerro". No caso de 3.1.2.e a questão parece mais complicada, enquanto "o que é isso?" parece muito informal, "qual é a essência disso?" pode requerer muitas tecnicalidades e de fato, requer inclusive uma justificativa para a crença na existência, ou não, da essência de um tipo (ou classe). As definições, ou tentativas, não tem o mesmo conteúdo com um vocabulário distinto e o passo natural é saber se existe alguma conjunção entre elas que nos dê uma definição necessária e suficiente do que sejam termos sortais. Adiante voltamos a isto. Nosso objetivo ainda é observar as dificuldades enfrentadas na tentativa de definição.

O fato de existirem definições distintas, ainda que relacionadas, sobre os termos sortais é por si mesmo um demonstrativo do caráter controverso da definição de sortais. Grandy, no entanto, afirma que, mesmo com controvérsias, há o entendimento de que uma expressão é um sortal se ela "aceita" modificadores numéricos. Assim, enquanto parece natural falar de "dois cubos de gelo", não é tão natural falar em "duas águas", de maneira similar se pode questionar alguém "quantos cubos de gelo deseja", já com a água o mais comum seria que se dissesse "quanta água", indicando que não se pode delimitar apropriadamente em unidades, ou "quantos 'copos de água"', compondo o termo na tentativa de torna-lo sortal. Para Grandy ainda assim existem exemplos sobre os quais há concordância sobre serem ou não sortais, é o caso de tigre (sortal) e água (não sortal). Mas mesmo para os casos assinalados como consensuais por Grandy é possível encontrar contra-exemplos, como pode se ver na defesa de Lowe (2009, p. 33 e 36) de que a 'água' deveria ser um termo sortal.

A discordância sobre uma definição geral comum a termos sortais e as condições que deve cumprir um termo para que seja sortal são os problemas mais sérios a serem enfrentados quando se discute a precisão do conceito que classifica predicados como precisos, no entanto existem outras questões. Uma questão é a expressão e classificação de termos sortais em diferentes idiomas. Grandy usa como exemplo a palavra "spaghetti", no inglês um substantivo massivo sobre o qual os modificadores numéricos não se aplicam bem (logo, um termo não sortal para alguns), no entanto, diz Grandy, em Italiano, "spaghetti", enquanto plural do substantivo contável "spaghetto" pode receber modificadores numéricos (configurando para outros um termo sortal). Talvez exista a possibilidade de se argumentar que determinado termo é sortal em função de um idioma, e não "universalmente sortal", mas isso parece se coadunar mais com pretensões da linguística do que da filosofia. Em todo caso, fica o prognóstico de que uma definição de sortais que apele para termos contáveis e

massivos – ainda que amplamente consensual, como afirma Grandy – torna a definição de sortal contexto dependente. Uma outra hipótese é justificar que não são os termos, mas sim os conceitos por eles representados os verdadeiros "sortais". Assim, o termo "spaghetti" em inglês e italiano não representariam exatamente o mesmo conceito que recai sobre a massa a que se referem. Esta última hipótese parece até mesmo a nós, que elaboramos, descabida, no entanto a elaboramos com a finalidade de promover um outro questionamento. Dada uma definição qualquer de sortais, seria apenas uma tradução exata – considerando que exista – de um termo x de um idioma para o outro que me forneceria o termo sortal x' equivalente do um outro idioma? Ao discutir termos sortais peculiares, termos sortais que recaem em período da existência dos individuais para os quais se aplica, Grandy, apresenta a terminologia "phase sortal" que atribui a David Wiggins e apresenta como exemplo a palavra *kitten*. "Kitten", diz Grandy, fornece um critério de identidade e de contagem, mas não especifica uma essência (3.1.2.e), não requer uma existência continuada (3.1.2.c) e não responde à pergunta "o que é isso?" (3.1.2.d). Para explicitar o problema dos termos sortais entre línguas tomamos "kitten" como x e nos perguntamos qual seria o candidato a x' mais apropriado para o português. Como possibilidades:

3.1.2.i) "Gatinho"

3.1.2.ii) "Gato novo"

3.1.2.iii) "Gato jovem"

Existe tradução apropriada entre essas? (3.1.2.i) não nos pareceu apropriado por ser um termo aplicável a qualquer gato quando tratado carinhosamente, ou a um gato que cresceu menos que outros, em qualquer tempo de sua vida. Se for assim, pode ser tomado como critério de permanência ao contrário de "kitten". (3.1.2.ii) Não tem critério de permanência, no entanto não tem necessariamente o mesmo emprego de "kitten", pois pode se referir a um gato adulto, novo em uma determinada residência, por exemplo. (3.1.2.iii) pode ser tomado como uma tradução mais apropriada do termo phase sortal "kitten". (3.1.2.iii), contudo, é um termo sintaticamente composto por duas palavras, dentre elas "jovem", que nos carrega de volta ao problema em (3.1.c). É provável que tomando a concepção de McKeon (2010, p. 52) se possa dizer que de fato nem "gato jovem", nem "kitten" são sortais, pois ambos carecem de critério de aplicação uma vez que "existem coisas, casos limítrofes, para os quais é indeterminado se a propriedade se acomoda ou não a elas". Um termo simples e phase sortal em português é "bezerro", mas não nos preocuparemos aqui com o sentido reverso (do português para o inglês) da presença dos sortais nos diversos idiomas, mais nos vale para essa exposição a problemática já posta sobre o controverso conceito e, principalmente, a observação da sensibilidade ao contexto – de uma língua – que a definição linguística contável/massivo impõe.

Acabamos de argumentar acima que o termo sintaticamente composto "gato jovem" não cabe na classificação de McKeon (2010) de sortais pela presença do termo "jovem", para o qual não há critério de aplicação. O termo "gato", no entanto pode ser classificado como sortal apelando para as definições do mesmo autor. Vemos assim que a composição de um termo sortal (gato) e um termo não sortal (jovem), resultou na composição de um termo não sortal composto (gato jovem), embora nada tenha emergido ao longo de nossa pesquisa sobre produtos de composição de termos sortais – ou uma álgebra dos sortais – e não sortais, o tema nos parece interessante, sobretudo, porque Grandy cita outra classificação de Wiggins onde o contrário acontece, isto é, a composição de um termo não sortal simples e um termo sortal simples resulta um novo termo composto que é sortal. O termo "mesa vermelha" é classificado por Wiggins como *restricted sortal*, segundo Grandy. Nesse termo composto temos o termo simples "mesa", sortal, mesmo pelos critérios de Mckeon, o termo simples "vermelho", não sortal pelos mesmos critérios e como composição um termo que possui aplicação (de "mesa" e de "vermelho"), identidade e individuação (de "mesa"), portanto, um sortal. Podemos concluir o mesmo de um outro modo a partir de um critério de contagem (3.1.2.a) ou um princípio de contagem e enumeração. Mckeon recorre a Peter Geach para explicar o problema da contagem para cores como propriedades: "o problema sobre a contagem de coisas vermelhas na sala não é que você não pode chegar ao fim, mas que você não pode iniciar" (GEACH, 1962, Apud: (MCKEON, 2010, p. 58)). Nós, por aqui, podemos recorrer a Lowe (2009) para um bom exemplo sobre tal afirmação. Lowe diz que supondo que exista uma mesa vermelha em uma sala, somos tentados a contar tal mesa como uma "coisa vermelha". No entanto, deveríamos desprezar a contagem de suas pernas vermelhas e do seu topo, ou de suas gavetas e puxadores vermelhos como "coisas vermelhas"? E o que dizer da própria tinta vermelha que cobre a mesa? Em mais uma questão, devemos contar as pernas da mesa e seu topo como cinco coisas distintas entre elas e também distintas da mesa? O exemplo de Lowe deixa claro que para que se possa contar, ou iniciar uma contagem, é necessário que se tenha um critério para a identificação do que conta como unidade (individuação) e um critério para que se reconheça o que conta como o mesmo (identidade). Para Lowe (2009, p. 13) um princípio de contagem é condição suficiente, mas não necessária, para que um termo seja sortal. Assim obtemos mais uma vez, como conclusão, o caráter sortal do termo "mesa vermelha", só que dessa vez sem o uso explícito de um critério de aplicação.

Uma outra (sub) classificação de sortais apresentada por Wiggins, segundo Grandy é a de *ultimate sortal*, ou categorias para Dummett, segundo Kim (2014, p. 2). Por ultimate sortal podemos entender grosseiramente um sortal que "individualiza" outras classes de sortais no lugar de individuar objetos e que não é individuado por qualquer outro sortal. O exemplo de Grandy de tais sortais é absolutamente especulativo, segundo ele pela falta de exemplos do próprio Wiggins. Supondo que os sortais "gato" e "cão" individualizam objetos específicos que sejam gatos e cães, um ultimate sortal seria um sortal que individualizasse

os sortais "gato" e "cão" (entre outros) e que não fosse individualizado por um outro sortal. Um candidato seria o sortal "mamífero", uma vez que "animal" não é um termo sortal para Wiggins.

Observando as definições mencionadas nesta subseção podemos pensar que sortais puros (ou substance sortals), phase sortals, restricted sortals e ultimate sortals podem todas juntas serem classificações apropriadas dos diversos tipos de sortais. No entanto, para o fim de nossa análise, que toma como pressuposto que a definição para termos sortais como uma oposição a termos vagos (e de forma mais ampla, imprecisos), todas essas subclassificações são desvantagem. Se sortais puros podem ser individuados por categorias superiores de sortais que desconhecemos (ultimate), se existem sortais que deixam de ser sortais em um momento desconhecido (phase) e se existem sortais dependentes de composição para serem sortais (restricted), embora não tenhamos conhecimento de que tipo de composição é capaz de tornar sortais em não sortais ou o contrário, parece mais fácil dar exemplos da imprecisão das definições para sortais do que de sua precisão.

3.1.3 Indexicais

É curioso perceber que uma série de problemas de imprecisão estão contidos na clássica sentença exemplo "O atual rei da França é calvo". "O atual rei da França" é uma descrição definida sem referente, "calvo" é um predicado não sortal e "atual" é um termo dêitico ou indexical. Embora indexicais não se comportem com necessária vagueza, sua natureza de adaptação ao contexto pode fornecer algum material na interpretação de termos vagos. Abaixo uma brevíssima definição de indexicais.

Um Indexical é uma expressão linguística que (i) em alguns dos seus usos muda de referente de acordo com o contexto e (ii) indica tal referente a partir de uma regra geral de uso inerente ao significado do termo. O que (i) diz é basicamente que: embora o pronome pessoal 'ele', na frase "Não aponte assim para ele", seja um termo indexical, o mesmo pronome pode assumir uma função diferente da indexicalidade em diferentes frases. Como poe exemplo, "Se joão é jovem hoje, então ele será amanhã", aqui, 'ele' é um elemento anafórico de retomada do nome João. Já a condição (ii) diz respeito à distinção que deve ser feita entre termos que variam de contexto para contexto, por um lado, e indexicais por outro. O termo 'cachorro', como apresentado na anfibolia (**3.1.b**), muda seu significado em distintos contextos, no entanto nada no significado da palavra 'cachorro' isoladamente parece indicar o que seria o referente desse termo. O termo 'eu', por outro lado, apresenta uma regra reflexiva indicando que o referente é o autor do proferimento. Essa regra é o que é desde Kaplan et al. (1989) a literatura chama de **Caráter** do indexical e se distingue do **Conteúdo** que é o referente do indexical no instante do proferimento. O que difere um termo indexical de um termo polissêmico qualquer, é o fato de que para o indexical essa variação é parte da própria estrutura do termo, enquanto um termo polissêmico adquire

sentidos novos por acaso (ou mesmo arbitrariamente) em meio aos usos da língua.

Kaplan et al. (1989) também distingue Indexicais entre puros e demonstrativos. Os Indexicais puros são aqueles que não necessitam de nada além do contexto para indicarem um referente, como exemplos "aqui", "hoje" e "eu". Demonstrativos, por outro lado, para ganhar referência dependem de uma demonstração (apontamento ou de uma intenção diretiva) exemplos são: "este", "lá" e "ele". Acabamos aqui isso que podemos chamar de um "lembrete" sobre a definição de indexicais. A razão para termos trazido à baila essa categoria é que já falamos de como o contexto pode atingir os termos, no caso as expressões polissêmicas, mas era preciso ainda falar daqueles que são definidos por sua dependência de um contexto. Uma conveniência em tratar esse tópico é que podemos em um link retornar ao nosso assunto principal, a quantificação.

Além de um espaço para a imprecisão ficar em aberto devida à necessidade que os indexicais têm de um contexto, esses termos também nos abrem espaço para análise da vagueza para além dos predicados. De acordo com Ruffino (2014), Jeffrey King apresenta a concepção de que a junção de um demonstrativo a um substantivo formaria um novo tipo de termo, o que chamamos de "demonstrativo complexo". Demonstrativos complexos como "este homem" ou "aquele carro" exerceriam na linguagem o papel de um Quantificador. No caminho oposto, segundo Braun (2017), alguns trabalhos (como Fintel (1994) e Stanley e Szabó (2000)) apontam quantificadores como termos indexicais. Aqui encerramos a apresentação do último elemento de imprecisão que trataremos aqui, na interpretação de expressões em geral, e em particular dos quantificadores.

3.2 Entre a semântica e o contexto

A seguir faremos uma exposição resumida de um dos trabalhos mais importantes na compreensão de lógica informal e também da pragmática. O artigo de 1967 de Hebert Paul Grice intitulado "*Logic and conversation*". Em linhas gerais, Grice apresenta duas novas formas de 'acarretamento' de proposições diferentes da implicação (ou consequência) lógica. É importante para nós essa observação sobre outras formas de consequência que não aquelas de propriedades estritas e bem definidas, sejam de lógicas clássicas ou não. Ainda que nosso tema central seja a definição e compreensão de alguns termos quantificadores e que não esteja traçado sobre o prisma do inferencialismo.

3.2.1 Implicaturas convencionais

Agora enveredando pelos caminhos de Grice, a primeira das suas formas de acarretamento tratada é a Implicatura Convencional. Para analisá-la, levemos em conta as duas frases abaixo:

3.2.1.a João é inteligente, mas é preguiçoso.

3.2.1.b João é preguiçoso, mas é inteligente.

Embora as duas frases tenham exatamente as mesmas palavras a frase da esquerda é mais enfática em frisar que 'João é preguiçoso', como se a partícula adversativa anulasse, ou ao menos diminuísse, o que é dito antes, já a frase da direita dá mais ênfase ao fato de que 'João é inteligente' exatamente pela mesma razão. O que acontece para Grice é que à diferença do modo como avaliamos as formas lógicas dessas duas proposições, apenas considerando que as duas partes da conjunção são verdadeiras, levamos em consideração o que está convencionado pelo uso dessa partícula adversativa. O significado lógico da frase é seu sentido referencial, o que está 'dito' na frase, o que é convencionado é apenas intuído pelos interlocutores, isto é, é o 'não dito'. A implicatura convencional de cada uma das frases é o que elas acarretam aos interlocutores por causa do significado convencional de suas palavras. As propriedades que definem uma implicatura convencional são basicamente duas. A primeira é o fato de que elas são presas à força convencional do significado das palavras e reconhecidas pelo interlocutor mediante a sua intuição linguística. E a segunda é que não dependem de um trabalho de cálculo dedutivo.

3.2.2 Implicatura Conversacional

A segunda forma de acarretamento de proposições é a 'Implicatura Conversacional' (GRICE et al., 1975, p. 45). Nesse caso, Grice admite primariamente que para que haja uma conversação, os falantes devem estar dispostos a cooperar minimamente para o acontecimento da comunicação. Para isso, implicitamente todos seguem e esperam que sejam seguidas, ainda que inconscientemente, certas máximas, o que é chamado de princípio da cooperação. As máximas (M) estão distribuídas em quatro categorias às quais estão relacionadas submáximas:

- Categoria da Quantidade: relacionada à quantidade de informação que deve ser fornecida numa mensagem. A ele corresponde duas máximas:

  M1.i) Faça com que sua mensagem seja tão informativa quanto necessário para a conversação.

  M1.ii) Não dê mais informações que o necessário.

- Categoria da Qualidade: se reduz à supermáxima "Procure afirmar coisas verdadeiras" e dela se pode deduzir as duas máximas mais específicas:

  M2.i) Não afirme o que você acredita ser falso.

M2.ii) Não afirme algo para o qual você não possa fornecer evidência adequada.

- Categoria de Relação: ligada a máxima (M3)"Seja Relevante".

- Categoria do Modo: ligada à supermáxima "Seja Claro" e várias máximas como as abaixo, entre outras:

M4.i) Evite obscuridade de expressão.

M4.ii) Evite ambiguidade.

M4.iii) Seja breve (evite prolixidade desnecessária).

M4.iv) Seja ordenado.

- Há três formas de interagir com as máximas de modo a formar uma implicatura:

3.2.2.a) Quando em uma enunciação nenhuma máxima é violada;

3.2.2.b) Quando em uma enunciação uma máxima é violada para impedir que outra o seja; e

3.2.2.c) Quando em uma enunciação uma máxima é violada especificamente para a obtenção da implicatura.

Por fim, as propriedades que caracterizam as implicaturas conversacionais são separadas por Grice em: calculáveis, pois existe um modo pelo qual o ouvinte infere a intenção informativa do emissor (GRICE et al., 1975, p. 50); canceláveis, as implicaturas são anuláveis de um contexto para o outro e por isso o acréscimo de informação pode ser capaz de fazer uma implicatura desaparecer; não-separáveis (ou não-destacáveis), dentro do mesmo contexto enunciados sinônimos possuem as mesmas implicaturas (GRICE et al., 1975, p. 57); não-convencionais, são externas ao sentido do enunciado; não determinadas pelo que é dito, mas pela ação de dizer e pelo dito; indetermináveis, diferente das inferências lógicas existe uma lista aberta de implicaturas possíveis para a qual não se pode determinar uma implicatura exata (GRICE et al., 1975, p. 58). Para que nossa proposta sobre os quantificadores seja retomada é necessário ainda apresentar mais uma distinção apresentada por Grice em seu artigo. Para o autor, existem implicaturas geradas apenas em casos particulares, onde o contexto é específico, mas também há implicaturas que podem aparecer independentemente do contexto que seja tratado, um dos exemplos apresentados por Grice é "eu quebrei um dedo ontem", seja qual for o contexto de enunciação dessa frase a implicatura que obtemos é de que "o dedo quebrado foi meu" e não de outra pessoa. Essas são Implicaturas Generalizadas (GRICE et al., 1975, p. 56).

3.2.3 A pragmática e o problema dos quantificadores

Voltando ao nosso objeto, lembremos as seguintes afirmações:

F1 Parte dos servidores estão em greve. Quando um, de fato, está.

F2 Alguns dos servidores estão em greve. Quando quase todos, de fato, estão.

A essa altura já podemos trazer alguns *insights* para tratar das falácias apresentadas em nossa introdução para o problema dos grevistas. Um deles diz respeito à óbvia violação que é cometida nas duas falácias às máximas conversacionais de relevância[4] e quantidade, onde os falantes não tornam suas informações tão informativas quanto necessário para a conversação. Depois disso podemos notar que a máxima violada não garante a preservação de qualquer outra máxima conversacional e, por fim, vemos que a violação da máxima pode gerar uma implicatura que o falante sabe que é falsa, violando a super-máxima "procure ser verdadeiro". Isso talvez nos diga em que "pecaram" os falantes, embora não saibamos se omissiva ou comissivamente com respeito à intenção. Sabemos que a proposta de Grice não deve ser tomada como absoluta, as máximas são na verdade um caminho para interpretação da parte do ouvinte. No entanto, é provável que seja o caminho mais direto que se tenha, uma vez que certas informações estejam implícitas. A proposta de Grice nos diz, em linhas gerais, que na ausência de informações mais precisas o ouvinte vai, e está autorizado a, usar essas máximas.

Quando expressões são tomadas como vagas por sua própria natureza elas não nos motivam na elaboração de definições. Ao contrário, como vimos com os sortais, nos motivamos em uma definição mais ampla dessa categoria da imprecisão e no que elas têm em comum. Isso pode acontecer com "calvo", "jovem", "grande parte", "muitos" e com toda sorte de termos. Como vimos, no entanto, ainda que certas implicações não sejam dadas de modo simples (o qual é o exemplo do paradoxo sorítico), provavelmente algumas conclusões são retiradas pelo ouvinte quando do uso dessas expressões. O que dá um caráter geral à proposta de Grice é exatamente isso. O fato de que em certos contextos algo pode ser concluído, e em especial em um contexto onde muitas informações se encontram implícitas o qual alguém pode dizer que nem mesmo é um contexto.

De certa forma, o que dissemos sobre como "pecaram", ou "utilizaram impropriamente" frases e expressões, os personagens da alegoria inicial nos dá uma dica sobre qual seria a forma "correta". Alguém que concorde com isso pode ainda dizer que a forma correta corresponde somente àquele contexto e nem "parte" (ou"grande parte") nem "muitos", por exemplo, teriam uma regra mínima de aplicação ainda que possamos reconhecer quando o seu uso não é adequado. Porém, as frases abaixo, sem contexto estabelecido, parecem ou não ter sentido?

[4] Poderíamos mesmo nos perguntar se a relevância já não está pressuposta nas outras máximas.

3.2.3.a) Não se trata de alguns, mas quase todos.

3.2.3.b) Pequena parte, mas ainda uma quantidade considerável, não se pode dizer quase ninguém.

3.2.3.c) Não a maioria, mas, sem dúvida alguma, grande parte.

A proposta, que como logo veremos não é nova, é a de que quando estão relacionados, os quantificadores parecem estabelecer algum significado próprio, independente de uma circunstância particular. Isso pode ser tomado, de outro modo, como a compreensão de que algum conjunto de regras conversacionais existe para termos vagos (ou não) para que sua compreensão seja dada. O tipo de implicatura que apresentamos com referência aos quantificadores é em primeiro lugar o das Implicaturas Generalizadas, por não dependerem de informações de um contexto específico. Mais especificamente, pensamos em Implicaturas de Quantidade Generalizadas, e na precisa categoria em que uma escala estabelece a relação que determina seu sentido, são essas as Implicaturas de Quantidades Escalares.

Segundo Levinson (2007) entre as Implicaturas Generalizadas estão as Implicaturas de Quantidade Generalizadas e entre as Implicaturas de Quantidades Generalizadas estão as de Quantidades Escalares. A definição apresentada pelo autor para uma escala linguística é a seguinte:

> Uma escala linguística é composta de um conjunto de alternativas linguísticas, ou expressões contrastantes da mesma categoria gramatical, que podem ser dispostas numa ordem linear por grau de informatividade ou força semântica. Tal escala terá a forma geral de um conjunto ordenado (indicado por $\langle e \rangle$) de expressões linguísticas ou predicados escalares, $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$, como em: $\langle e_1, e_2, e_3, ..., e_n \rangle$ onde se substituirmos e_1 ou e_2 numa estrutura sentencial A, obtemos as sentenças bem formadas $A(e_1), A(e_2)$, etc., e onde $A(e_1)$ acarreta $A(e_2)$, $A(e_2)$ acarreta $A(e_3)$, etc., mas não vice-versa (LEVINSON, 2007, p.164).

A forma como as enunciações são tratadas na escala linguística é similar à explicação que demos sobre a relação aristotélica de subalternação: substituir uma sentença maior por uma menor na escala garante a verdade, mas não é o caso da menor para a maior. Apresentamos acima uma reformulação dessa ideia, onde nos comprometemos com o fato de que ($A(e_1)$ acarreta $A(e_2)$ e $A(e_2)$ acarreta $\neg A(e_1)$)[5] Levinson (2007, p. 166) apresenta então várias escalas linguísticas criadas por Laurence Robert Horn em seu trabalho de doutorado de 1972, dentre elas a que nos interessa trata de quantificadores. A escala sugerida por Horn seria a seguinte:

$$\langle \textit{todos},\ \textit{a maioria},\ \textit{muitos},\ \textit{alguns},\ \textit{poucos} \rangle$$

[5] Estamos no centro de uma discução pragmática, mesmo assim não custa reforçar que esse acarretamento é, de modo algum, uma consequência lógica.

As escalas de Horn repercutiram muito na década de 1970 e ainda são muito importantes nos estudos no campo da pragmática, por isso mesmo estas escalas já foram muito questionadas. Em especial esta acima pela presença da palavra "poucos". Críticas desse tipo consideram que escalas devem ter termos com mesma "monotonicidade e polaridade"[6], "poucos", com polaridade negativa, não deveria aparecer na escala. Já demos um breve exemplo de como as escalas com polaridades distintas se comportam na página 80. Nossa opinião é de que, embora a ideia da escala esteja correta e seja útil, os termos não estão classificados da melhor maneira mesmo que as expressões tenham todas a mesma polaridade. Por exemplo, além de "poucos" o termo "muitos" não deveria estar nessa escala. O exemplo das brasileiras albinas na introdução mostra que mesmo sendo "minoria" um grupo pode ser quantificado com o uso de "muitos". Um outro problema na posição de "muitos" é que ela retira o caráter, digamos, universal, da escala. É simples de notar com conjuntos pequenos. Se supusermos um conjunto com três elementos podemos dizer que "a maioria", ou mesmo "todos" não são "muitos".

No entanto, como já dissemos, acreditamos que a noção de escala linguística de quantificadores pode ainda ser muito útil e é de fato primordial em nossa proposta. O que se passa no caso de "muitos" e "poucos", em nossa opinião é que estes termos, em especial, não têm lugar na escala por serem absolutamente contextuais. É verdade que termos indexicais tem seu conteúdo dado pelo contexto, e nesse sentido é difícil argumentar "muitos" e "poucos" estão na mesma categoria de "eu", "agora" e "este". No entanto, ao menos no que diz respeito à dependência do contexto, eles nos parecem estar mais próximos dos indexicais do que desses termos que adquirem sentido em relação com outros ("grande parte", "pequena parte"). Finalmente chegaremos, logo mais, ao capítulo 4. Neste capítulo separaremos alguns quantificadores que tentamos organizar em uma escala. Nossa escala terá muitos dos princípios tratados aqui. Trazemos a crença de que existe um termo mais informativo do que outro, uma ordem, as noções de relevância, as máximas conversacionais e o princípio de cooperação são todos admitidos. Nós no entanto não nos preocupamos com a presença de termos de polaridade distinta na mesma escala, a não ser por evitarmos que se encontrem nos extremos da escala. Isso é, nos parece de fato sem sentido que exista uma linha de acarretamento (implicação, implicatura, consequência) que leve de "todo" a "nenhum". Consideramos também, como já resta claro, que os problemas com "muitos" e "poucos" estão em suas naturezas e não em suas polaridades ou na monotonicidade distinta dos termos[7]. Abaixo então a apresentação de nossa escala para uma primeira vista. A escolha dos termos e sua organização serão tema do capítulo 4.

Todos » Quase Todos » A Maioria » Grande (Boa) Parte » A minoria » Pequena Parte » Quase nenhum » Algum(ns)

[6] *Ver. Fauconnier (1975) e Matsumoto (1995)*

[7] Tratamos quatro formas mais simples de monotonicidade na seção 1.4, como veremos no capítulo 4 essa noção já foi refinada para determinantes.

O que determina o uso de um no lugar de outro termo não é uma regra prescritiva. O que Estamos dizendo, ou querendo dizer, com as setas (»), pode ser ilustrado pela seguinte máxima: "até 'aqui' faz sentido (para os falantes) dizer 'isso', mas passando daqui não faz mais". Uma máxima com dois dêiticos, parece confusa, mas é assim propositalmente. O "aqui" é o limite de fronteira (vago, mas contextualmente identificável), o "isso" (indexical demonstrativo), um dos quantificadores. O termo "aqui" é um indexical puro, com conteúdo e caráter. O conteúdo é a quantidade (variando de uma enunciação para outra) que se apresentar na ocasião, o caráter é dado justamente pela regra que determina que não é relevante usar o quantificador anterior ou posterior em nossa escala.

Antes de encerrar o capítulo, como nos prendemos muito à década de 1970, pensamos ser importante realizar uma pequena digressão sobre o estado da arte da pragmática nesse tema. A partir dos anos 2000 um novo debate sobre as implicaturas escalares surge. Um pouco mais focado na natureza das implicaturas do que na estrutura das escalas, correntes, classificadas por Potts (2012) como: noncism, Gricianismo tradicional, neo-Graicianismo, Localismo e Padronismo, disputam sobre dois pontos: Existem ou não princípios pragmáticos, que possamos conhecer, geradores de determinadas implicaturas (escalares ou não)? Tais princípios são dependentes de contexto ou gerais? Não é difícil entender como tais questionamentos interferem na ideia de estudar os quantificadores imprecisos. Respostas radicalmente negativas à primeira questão e que privilegiem muito o contexto no caso da segunda questão podem destruir a perspectiva da criação de um escalonamento entre os quantificadores. Grosso modo podemos dizer: se não há implicatura (escalar ou não), independente de contexto, então as partes que compõem as proposições acarretadas também não têm seu significado independente de contexto. Isso nos conduz à ideia de que não se pode dizer que em todos os casos (ou mesmo em alguns casos controlados) "a maioria" acarreta "grande parte", por exemplo. O debate que propomos aqui pode ser aprofundado posteriormente sendo calcado primariamente em leituras mais profundas de Recanati (2003), Chierchia et al. (2004), Russell (2006), Geurts (2009), Sauerland (2014), Ippolito (2010) e Chierchia (2013).

Os psico-linguístas já estão, há tempos, bem integrados com projetos empíricos de verificação se seus pressupostos, as escalas e o significado dos quantificadores não escapam a esses estudos. Via de regra isso acontece na tentativa de descobrir que tipo de processo mental ocorre no processamento ou como se dá a aquisição da compreensão de um termo ou estrutura linguística. Um exemplo interessante sobre o significado, em termos cognitivos, da expressão "most" está em Pietroski et al. (2009), em que os autores se questionam entre três representações distintas qual seria a mais usada pelos falantes para representar e para avaliar a aplicação de "most". As que são interessantes do ponto de vista deste trabalho são a representação semântica que usamos aqui para o quantificador "A Maioria" (A maioria dos A's são B's *sse* $|A \cap B| > |A - B|$) e uma representação baseada em bijeções. Nos resultados específicos deste trabalho, as representações funcionais saem na frente, pelo

menos para representação. Isso não seria uma preocupação aqui, a ideia é encontrar uma, entre tantas outras possíveis, definição para termos quantificadores que julgamos que não tenham ainda. Por outro lado, em favor de nossas escolhas no âmbito da pragmática o trabalho de Carvalho et al. (2016) apresenta evidências da existência de escalas do tipo Horn que favoreceriam um neo-Gricianismo contra um contextualismo mais extremo. Este segundo caso, tampouco, deve nos envaidecer das escolhas que fizemos. O nosso objetivo, que não devemos perder de vista, é tão somente uma definição que primeiramente possa ser aceita como parâmetro de verificação dessas sentenças tomadas como imprecisas e que, em segundo lugar, ajude de algum modo no processo de formalização dessas expressões. Nesse sentido, o capítulo 4 configura a contribuição da tese ou a tese em si.

4 CLASSIFICAÇÃO E DEFINIÇÃO DE QUANTIFICADORES

Não existe um caminho para a felicidade. A felicidade é o caminho.
Mahatma Gandhi

A pluralidade de abordagens na interpretação de expressões quantificadoras apresentadas aqui, por ela mesma, nos desperta uma intuição com a qual o leitor pode até mesmo discordar para compreender o que queremos com esse capítulo. A saber: Nem "o que é um quantificador", nem "a adequação do termo quantificador" são pontos pacíficos em lógica ou em linguística (ou mesmo em estudos que fizeram fronteira entre essas duas ao longo da história). O que isso significa, sob nossa percepção, é que, dentro de determinados limites, temos espaço para reinterpretar e até mesmo propor um escopo para o que são quantificadores, no que tange ao nosso interesse. Isto é, posto que há debate, há também uma pequena derrota de cada postura (abordagem) que, por não ser consensualmente reconhecida como a melhor sob todos os critérios, carece de uma defesa que normalmente é dada dentro do seu "campo de utilidade": "Pode ser insuficiente, mas nos serve para tal e tal coisa" é um lugar comum na defesa de uma abordagem em qualquer campo de estudo. Esta tese nada tem de diferente de outros trabalhos no sentido de que "pode ser insuficiente, mas tem sua serventia". Ela se difere, no entanto, das abordagens e teses aqui apresentadas, pela tentativa de dizer quais são os limites de "suficiência" destas abordagens.

4.1 Quantificadores em Questão

Se nos encaminharmos a uma reflexão sobre os modos de definir quantificadores apresentados neste trabalho, podemos primeiro falar dos esforços de Mostowski, em sua generalização de quantificadores, como um passo para abranger uma quantificação não possível nos sistemas fregeanos; segundo, explorar a definição de Lindström como uma concretização do que Mostowski já pensava haver realizado, uma definição do que seria em termos semânticos, abstratamente[1] um quantificador. No entanto, a necessidade de uma abordagem semântica-abstrata mais robusta se dá sempre por causa dos limites encontrados

[1] Estamos nos referindo a (*i*) na página 33 e (*ii*) na página 38, as definições de verdade generalizadas. Chamamos de abstratas porque ao passo que não dão as condições de verdade de um quantificador individualmente se pretendem à definição das condições de verdade da "categoria" quantificadores.

na formalização dos quantificadores específicos. Por exemplo, quando o quantificador de Rescher Q^R (Lembre que lemos $Q^R x A(x)$ como 'A é a maioria do domínio') recebe uma definição de verdade temos uma categoria semântica nova, a saber, o conjunto $\mathbf{Q}^R$[2] de subconjuntos do domínio, além da relação entre tal "categoria semântica" e o próprio domínio, ampliando assim os elementos da definição abstrata do que é um quantificador, aqui a definição (i) (página 33), à la Mostowski, era suficiente. Indo adiante, a implementação do quantificador Q^{Ma}, como representante da expressão linguística "a maioria", reconhecidamente (incluindo aí o próprio Rescher) impossível de ser realizada pelo quantificador Q^R, é um percalço para a forma da definição de verdade adotada até então. Isso porque mais um elemento semântico está em jogo, Q^{Ma} é uma relação entre subconjuntos do domínio, e nossa definição abstrata passa a contar com um conjunto de pares ordenados de subconjuntos do domínio $\mathbf{Q}^{Ma}$ (contido no produto cartesiano do domínio M^2).

Os dois exemplos acima mostram tão somente que: elementos semânticos vão sendo introduzidos às definições na tentativa de uma definição de verdade ampla o suficiente para todo tipo de quantificador (ou pelo menos a maior quantidade possível). Limitado a esse recorte, podemos dizer que alguns quantificadores são formalizáveis em primeira ordem seguindo a perspectiva de Frege – os desenvolvimentos tarskianos etc – outros, que não podem ser formalizados assim, podem sim ser formalizados num esquema à la Mostowski, outros ainda não serão passíveis de tal formalização, mas podem ser formalizados na proposta de Lindström. Todos, os quantificadores deste recorte, podem ser formalizados nesse último "estilo". O que estamos defendendo é que: a visão, incontestavelmente útil, da generalização não só apresenta meramente por acidente as particularidades e propriedades dos quantificadores que estão neste recorte, como também deixa de lado outras formas de quantificação. Um debate atinente às formas de quantificar, por outro lado, deve ter como critério a questão sobre o que assemelha e o que difere os quantificadores.

Digamos que a resposta do que os assemelha já é a própria definição de quantificadores que venha a ser adotada. Em que pese o fato de que "definir" e "dizer o que é" estão longe de ser o mesmo, qualquer um que defina algo está dizendo "o que é aquilo para si", e assim se obrigando à resposta da questão sobre "por quê vê daquela forma?". Na definição de quantificadores, além de ser viável que um pesquisador defenda uma proposta dentre tantas, é também possível que se desloque a uma nova proposta simplesmente por perceber a ausência de tratamento direcionado àquela classe que ele mesmo nomeia como quantificadores. Vamos com essa intuição dizer de forma mais direta a quais expressões nós nos referimos aqui como quantificadores.

[2] Ver seção 1.2.

Tabela 4 – Quantificadores Básicos Abstratos

Quantificador	**Derivações**
Todo	Toda, Todos, Todas, Qualquer, Qualquer um e sinônimos.
Algum	Alguns, Alguma, Uma, Um, O, A, Existe e sinônimos
A Minoria	Menor parte de dois
A Maioria	Maior parte entre dois
Grande parte	Boa parte
Pequena parte	..
Quase Nenhum	Quase nenhuma
Quase Todos	Quase todas
Muito	Muitos, Muitas, Muitíssimo, Muitíssimos
Pouco	Pouca, Poucos, Poucas, Pouquíssimo, Pouquíssimos

Este recorte nos obriga, como já dito antes, a apresentar uma resposta para porque vemos assim. Isso é, por que vemos a tabela acima como representando um grupo de quantificadores e por que apenas esses nos interessam? A resposta à primeira questão é muito direta. São quantificadores, porque indicam quantidades, são expressões utilizadas em português dentro de um contexto para indicar uma porção, seja ela precisa ou não. Não se trata de dizer que somente fazem isso, algumas delas podem indicar, por exemplo, intensidade. Agora, por que apenas o grupo de expressões acima é de interesse aqui? Iniciamos esse questionamento pensando em outras maneiras de especificar esse grupo de quantificadores. Embora uma questão preliminar seja sobre a razão para separarmos quantificadores nas expressões em português, poderíamos ter levantado a questão sobre quantos quantificadores podem existir.

4.1.1 Materialmente Possível x Interessante

Fazemos uma análise de expressões de línguas naturais, e mais especificamente uma análise que observa limites de formalização dos quantificadores ordinários. Um dos limites é o limite material. Partindo do nosso pressuposto, já introduzido anteriormente, de que nos interessam apenas domínios finitos para nossos propósitos, poderíamos pensar quantos quantificadores são "combinatoriamente possíveis". Estamos tratando, ainda que com mecanismos da teoria de modelos, de quantificadores da linguagem natural ou determinantes, que sempre têm um domínio de discurso, ainda que implícito. Mesmo assim, nosso trabalho é pelo sentido amplo desses determinantes em qualquer domínio. Assim, a pergunta é sobre quantos quantificadores locais e globais eu teria. Comecemos pelos globais. Um quantificador global associa a cada domínio M uma relação de segunda ordem sobre M, sendo M um conjunto qualquer, nossa questão se converte em quantos conjuntos existem, adotada a restrição a conjuntos finitos essa pergunta se converte ainda

em "quantos conjuntos finitos existem", mas assim como a classe de "todos os conjuntos não é um conjunto", "a classe de todos os conjuntos finitos também não é". A questão meio sem sentido retorna uma resposta não muito satisfatória de que existem infinitos quantificadores. Passemos então aos quantificadores locais e finitos, já sabendo do problema que poderemos enfrentar. Como os quantificadores locais são relações entre conjuntos do domínio e cada tipo ($\langle 1\rangle$, ..., $\langle n\rangle$; $\langle 1,1\rangle$,..., $\langle 1,n\rangle$ etc.) corresponde a uma categoria de quantificadores, então existem ao menos tantos quantificadores quanto a soma das relações possíveis em cada tipo de quantificadores. Essa também é uma forma ruim de contar os quantificadores. A partir de um determinado tipo o quantificador passa a ser uma mera possibilidade, sem existência na linguagem natural e possivelmente sem qualquer relevância matemática [3].

O fato é que especificar um recorte no tipo $\langle 1,1\rangle$ é o suficiente para que fiquemos entre os quantificadores mais importantes na linguagem natural. Nesse campo, podemos vislumbrar quais seriam esses limites, que chamamos de materiais, isso é, as combinações possíveis de relações entre dois conjuntos em um domínio. Voltamos à questão da cardinalidade de cada domínio. Estamos pensando em domínios finitos, e embora pareça que as restrições feitas até aqui diminuiriam muito o número de quantificadores possíveis e que todas as especificações[4] nos dariam um recorte mínimo, faremos ainda mais uma restrição, extrema, para mostrar que não é verdade que este recorte se torna tão pequeno assim. Os domínios para os quais queremos saber o número de quantificadores terão apenas 2 elementos. A quantidade de quantificadores de tipo $\langle 1,1\rangle$, é o número de argumentos (2), elevado ao número de partições do domínio, nesse caso (4) elevado ao número n de elementos do domínio, isto é, 2^{4^n}. Um domínio de dois elementos teria $2^{16} = 65.536$ [5], essa quantidade pode ser significantemente reduzida a 512 conservativos. Mas isso tudo, além de não passar de um exercício mental para um conjunto insignificante, não nos diz nada sobre quais desses são naturais e nem se existem naturais não contemplados aí.

O ponto dos dois últimos parágrafos é: a definição de quantificadores dada aqui não poderia se basear nos limites materiais da formalização. Isso não faria sentido nem mesmo se nós advogássemos em favor da capacidade da definição de verdade de Lindström de formalizar todas as expressões quantificadoras da linguagem natural. Isso não seria possível porque ainda que os tais limites materiais nos dissessem (dentro do padrão de formalização) quantos quantificadores existem não nos diria quais – e nem mesmo quantos

[3] Pense por exemplo em um quantificador tipo $\langle 1000, 5075, 9000, 1, 1, 111\rangle$ ainda que não seja a nossa intuição que determine se esse quantificador é significante ou não, matematicamente falando, é de se esperar que se por alguma sorte esse especificamente seja um quantificador que faça algum sentido muitos outros não farão, não terão aplicação ou não serão operações referentes a nada racionalmente interessante.

[4] Apenas para domínios finitos com quantificadores $\langle 1,1\rangle$, que sejam formalizações de determinantes ou quantificadores da linguagem natural, etc.

[5] Como vimos antes cada propriedade (EXT, CONS, INT) leva em conta um número de partições específico, assim, podemos entre esses buscar a quantidade com uma propriedade P, desejada.

– desses quantificadores ocorrem na linguagem natural. Voltemos então ao recorte com a resposta que ainda devemos: "por que os quantificadores selecionados nos interessam?", mas um pouco antes, "o que há em comum entre os quantificadores escolhidos?".

As propriedades estudadas dos quantificadores formais nos servem apenas na medida em que nos aproximam desses quantificadores (os da linguagem ordinária). Notamos que a noção abstrata do que é um quantificador, apesar de ser pensada para generalizar, é de certa forma subordinada às naturezas particulares dos quantificadores – ao menos no processo de definição dos quantificadores –, assim é preciso ter os termos objetos da descrição (poucos, todos, grande parte etc.) em vista e não apenas uma noção geral do seu significado. O qual seria o caso se procurássemos em outra língua natural ou artificial um termo que desse conta de mais sentidos do que os possíveis em português para a expressão "poucos", por exemplo. Uma razão prática, evidentemente, é que esta é uma tese em português, mas temos um motivo extra para evitar certos comparativos ou tentativas de traduções que tentem captar o exato significado de um quantificador. É que o fato de um termo ser tradutível por outro não quer dizer que possa, ou deva, estar em posições sintáticas equivalentes nas duas línguas[6]. A implicação disso é que termos com um significado muito próximo podem ser alegados distintos pelo fato de não terem o mesmo comportamento (ou comportamento similar) em línguas distintas. Pense no lugar comum de que "saudade" é uma palavra exclusivamente existente no português e a resposta de que em inglês a sentença "*I miss you*" tem o mesmo significado da frase do português "Eu sinto saudades de você". Alguém pode alegar uma série de coisas defendendo a posição de que não é o mesmo, que *miss* é um termo mais amplo, que o termo "saudade" é mais poético ou, que não são o mesmo por suas classes gramaticais distintas. Enquanto "saudade" é um substantivo, *miss*, para ter significado aproximado, deve ser entendido na sua função como verbo e já por isso não são o mesmo.

4.2 O Que têm em Comum?

Primeiro, apenas as quantirrelações (quantificadores de tipo semântico $\langle 1, 1\rangle$) estão sendo observadas. Segundo, apenas as quantificações explícitas nos interessam. Se existem quantificadores implícitos é por analogia às quantificações diretas, ou explícitas. Por exemplo, a abordagem como quantificador da expressão "quase sempre" é basicamente o tratamento do quantificador "quase todo" restrito ao domínio do tempo ou da recorrência de um evento ("ocorre quase sempre" = "ocorre em quase todos os casos"). A caracterização dos quantificadores implícitos, a propósito, pode ser dada pela afirmação de que eles têm em comum o fato de trazer implicitamente no seu significado o domínio sobre o qual quantifica ("obrigatório" quantificando sobre normas, "Acredito" quantificando sobre conhecimento,

[6] Ver como exemplo a distinção entre *A-quantification* e *D-quantification* no capítulo 0.2 sobre variedades de quantificação em Peters e Westerst (2006).

etc.). Embora todos os exemplos anteriores reflitam uma abordagem de modalizadores como quantificadores, existem inúmeras referências a quantidades que são feitas indiretamente[7] nem todas elas são quantirrelações. Terceiro, não nos interessamos por combinações de quantificadores que sejam sinônimas de um quantificador simples e aqui incluímos também os quantificadores exceptivos. Pense por exemplo que, em português a construção "Todos exceto pequena parte têm determinada propriedade." diz o mesmo que "Quase todos têm determinada propriedade". Um ataque a essa ideia que poderia ser feito aqui é que existem construções exceptivas que não são tão facilmente redutíveis. Construções como "Todos exceto João ...", quando é relevante destacar o indivíduo junto com sua posição no domínio não teria um bom equivalente em "Quase todos têm determinada propriedade" e as construções do tipo "João não tem determinada propriedade, mas todos os outros têm.", que são muito mais próximas, mostrariam que aqueles quantificadores escolhidos em nossa lista não encerrariam os quantificadores mais básicos. A resposta direta aqui é que tais frases exceptivas mais específicas são na realidade construções singulares. Sentenças singulares podem ser compreendidas como quantificadas, é na verdade uma proposta corriqueira depois de Barwise e Cooper (1981) interpretar SN como quantificadores. Isso quer dizer que essa proposta pode até mesmo ser ampliada, mas não é a defesa feita aqui. Antes disso estamos dizendo apenas que quando reconhecidas como quantificando, as quantificações podem ser reduzida àquelas de nosso quadro. Duas ausências notáveis no quadro são "Nem todo" e "Nenhum". Nossa dispensa dessas quantificações se deve à nossa interpretação de que elas são compostas, isso é, "Nem todo" é um sinônimo de "não todo" e "Nenhum" significa algo muito próximo de "não algum". O mesmo, vai ficar visível, não se passa com "Quase nenhum", "Pequena Parte" e "A Minoria". Para um exemplo rápido veja que "não a maioria" pode apontar para algo diferente de "A Minoria", como a "A Metade".

Finalmente, por que apenas essas expressões nos interessam? Nossas expectativas sobre essas expressões é a de que elas sejam *expressões quantificadoras abstratas básicas*. Números ou proporções explícitas não são quantificações abstratas nessa concepção, mas formas de quantificação determinada, sem necessidade de definição, ao menos na linguagem natural. Chamamos de abstratas por esperar que não sejam tão específicas que tenham significado atrelado a um contexto/domínio próprio e chamamos de básicas por imaginar que são expressões que cumprem um papel tão importante na linguagem que, ao menos na maioria dos casos, são intersubstituíveis por outras quantificações das quais são sinônimos. As quantificações abstratas mais básicas, destacadas aqui em português sem qualquer pretensão de que sejam universais, são quantificações representativas de outros tipos de quantificações ao menos no quesito que possibilita sua classificação como faremos

[7] Os quantificadores recíprocos, como *each other*, são quantificações implícitas que em determinados contextos se referem a relações entre dois indivíduos ou duas classes e, via de regra, indicam uma quantidade maior do que um. Artigos, definidos e indefinidos, indicam também implicitamente dois tipos de quantidade 'O'$= 1$ e 'Um' ≥ 1.

aqui. É importante observar a ideia de que são "expressões representativas de outros tipos de quantificação". Não estamos propondo que são sinônimos perfeitos de outras expressões, nem que sejam melhores formas de expressar outros quantificadores. Nos dois casos estaríamos no escopo específico de uma teoria linguística anacrônica e prescritiva. Nosso objetivo é, no entanto, dizer que o que pode ser dito com esses quantificadores abarca tanto do que pode ser dito com outros quantificadores que eles são uma boa amostra do que seria o universo da quantificação na linguagem natural. Com isso, apresentar propriedades de tais quantificadores é conseguir um esclarecimento sobre limites da formalização e/ou da precisão.

4.2.1 Separação por Propriedades - A relação R

Ao separarmos por propriedades específicas, podemos ver que essas expressões possuem propriedades muito distintas que já tratamos aqui anteriormente. Essas propriedades são vistas basicamente na forma como devem ser relacionados os dois conjuntos na interpretação do quantificador tipo $\langle 1,1\rangle$ em questão. Lembremos que uma sentença com um quantificador $\langle 1,1\rangle$ em uma linguagem L tem a forma $Q^M x(\phi(x), \psi(x))$, em que as extensões de $\phi(x)$ e $\psi(x)$ estão numa relação $Q_M(\phi^{x,M}, \psi^{x,M})$. Temos usado letras latinas maiúsculas para representar mais diretamente as extensões das sentenças. Assim, $\phi^{x,M} = A$ e $\psi^{x,M} = B$. Nós no entanto notamos aos estudar essas propriedades que não é em todo caso que as extensões dos conjuntos, os nossos A's e B's aqui, são o mais "importante". Dizemos com isso que essas relações, em alguns casos, são entre partes de A's e B's ou ainda, são "relações entre relações" entre A's e B's. Para melhor esclarecer isso, pense no caso de um quantificador CONS (conservativo) qualquer (Todo, Quase Todo, Algum etc.) pela definição **1.3**.

$$Q^M(A, B) \ sse \ Q_M(A, A \cap B).$$

Note que todo interesse que temos em B é em sua parte em interseção com o conjunto A. A e B são subconjuntos do domínio, M, o quantificador Q^M conservativo, de forma genérica, é uma relação $R(A, \beta)$ tal que $\beta \subseteq B \cap A$. Sendo assim, toda quantirrelação (quantificador tipo $\langle 1,1\rangle$) pode ser entendida de forma simplificada como uma relação entre dois conjuntos[8] $R(\alpha, \beta)$. Em alguns casos α não é necessariamente A e β não é necessariamente B. O que interessa então é discutir quais são as propriedades de R e quais são os conjuntos α e β.

O que faremos agora é uma tentativa de classificação entre os quantificadores no sentido de aproximar aqueles com propriedades similares. Para lembrar, dissemos que o quantificador existencial (seja na interpretação $\exists$ ou $Q^{\exists}$), na nossa tabela o quantificador

[8] Mais precisamente, para todo quantificador Q^M tipo $\langle 1,1\rangle$ existe um conjunto de relações binárias R entre subconjuntos do domínio M tal que $\mathbf{Q}^M$ é um subconjunto de M^2 e $R \subseteq \mathbf{Q}^M$.

básico "Algum", é um quantificador com a propriedade da intersecividade (INT). É fácil de ver que o quantificador, mesmo que não básico abstrato, "nenhum" também tem a propriedade INT. Isso é, somente a interseção entre os argumentos do quantificador é relevante na definição desse tipo de quantificador. Relembre a definição apresentada no capítulo 1:

$$\text{Se } A \cap B = A' \cap B' \text{ então } Q_M(A, B) \textit{ sse } Q_{M'}(A', B').$$

Aqui $R(\alpha, \beta)$ é simplesmente $A \cap B$. Isso nos diz que a relação interessante entre os conjuntos, isso é, R é a interseção, e que $\alpha = A$ e $\beta = B$. Essa relação é definível em primeira ordem, assim como as relações $A \subseteq B$ e $A \nsubseteq B$. Por consequência, quantificadores: Todo, Algum, Nenhum e Nem Todo também são. Vamos reservar a informação de que entre esses quantificadores – incluindo dois básicos abstratos – os quatro aristotélicos, mesmo que diferindo na propriedade R que os define, têm algo em comum, qual seja, o seu R é definível em primeira ordem. Nada de novo até aqui. Devemos ter atenção ao fato de que entre as quantificações que chamamos de básicas e abstratas não estão os números, ou as quantificações numéricas. Esse tipo de quantificador é classificado em Keenan e Stavi (1986) como *cardinal* e faz parte de uma lista maior na qual os autores incluem "aproximadamente n", "exatamente n", "mais/menos que n" e "no máximo/mínimo n" [9] . Em todo caso podemos localizá-las nesta cadeia de propriedades como aquelas que dependem da cardinalidade de suas interseções e isso será útil se entendemos esses quantificadores como casos de fronteira.

$$\text{Se } |A \cap B| = |A' \cap B'| \text{ então } Q_M(A, B) \textit{ sse } Q_{M'}(A', B').$$

Esta é a propriedade de quantificações em frases do tipo "n As são Bs", "Ao menos n As são Bs", "No máximo n As são Bs"[10]. O que faz esses quantificadores deixarem de ser do grupo dos abstratos é justamente o fixador numérico, isso é, o fato dessa cardinalidade estar associada a uma quantidade definida. R aqui é a cardinalidade da interseção entre dois conjuntos ou uma relação entre essa cardinalidade e um número. Alguns quantificadores básicos abstratos, por outro lado, são relações R entre conjuntos e suas cardinalidades sem qualquer fixador numérico. R em tais quantificadores depende mais de uma noção de ordem do que os quantificadores fixados numericamente. Essa posição pode ser defendida no contexto de uma linguagem de primeira ordem, ainda que nossa baliza não seja a lógica de primeira ordem. Observe que embora as descrições das propriedades dessas quantificações, "*Ao menos 3*" e "*A maioria*", em termos de conjuntos expressem inequações, apenas um dos quantificadores é expressável em primeira ordem. A saber, os quantificadores como

[9] Westerståhl (2007), por outro lado, em uma abordagem desses quantificadores como determinantes chama-os de *Numerical DETs*

[10] Respectivamente $|A \cap B| = 3$, $|A \cap B| \geq 3$, $|A \cap B| \leq 3$

$|A \cap B| \geq 3$ (pelo menos/no mínimo 3) e $|A \cap B| \leq 3$ (no máximo 3) poderiam ser expressados em um sistema de lógica de primeira ordem com identidade, respectivamente como:

$$\exists x \exists y \exists z (A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge B(x) \wedge B(y) \wedge B(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

e

$$\neg \exists x \exists y \exists z (A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge B(x) \wedge B(y) \wedge B(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

Nos casos de 'A Maioria', 'Pelo menos a Metade', 'A Metade', 'No máximo a metade' e 'A Minoria', por outro lado, a relação de ordem deve estar na estrutura, o que nos faz de entrada abrir mão de uma estrutura e de uma linguagem de primeira ordem. O R abaixo representa uma das relações $\leq, \geq, =, <, >$ entre os dois conjuntos ($(A \cap B) = \alpha$ e $(A - B) = \beta$). A propriedade particular deste tipo de quantificador é a relevância da relação entre partes do conjunto, e não de um fixador, um ponto de corte (como em mais que n, menos que n, exatamente n).

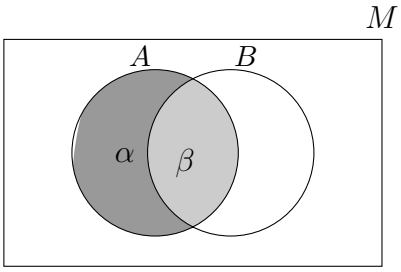
$$\text{Se } |A \cap B| \ \ R \ \ |A - B| = |A' \cap B'| \ \ R \ \ |A' - B'| \text{ então } Q_M(A, B) \ sse \ Q_{M'}(A', B')$$

Não é possível expressar qualquer um desses quantificadores em primeira ordem. No entanto, eles têm propriedades como ISOM/EXT/CONS que dão a eles um caráter de constância. A informação que reservamos acima, sobre os quantificadores cujo R pode ser definido em primeira ordem, precisa ser lembrada aqui para que apresentemos esses quantificadores como uma categoria distinta, isso é, para que se possa argumentar que quantificadores cardinais não são da mesma categoria de outros quantificadores tratados anteriormente. Vamos dizer que os primeiros quantificadores, pela natureza da propriedade de seu R, pertencem à categoria $R_{p.o}$, e os quantificadores onde $R(|\alpha|, |\beta|)$ determinam a propriedade R, como pertencentes à categoria R_c[11]. Além da diferença que já foi posta, vamos falar de similaridades entre eles que nos serão úteis na visualização de uma nova classe. Nossa análise aqui propõe que existem quantificadores que não possuem qualquer propriedade precisamente definível de seu R, e outros que só são definíveis quando é possível relacionar seu R com outros, isso é, quando R mesmo está dentro de uma outra relação. Benthem (1984) desenvolveu uma forma de representação visual dos quantificadores, conhecida como triângulo numérico[12], que é muito interessante na visualização de propriedades dos quantificadores. No triângulo é possível observar monotonicidade e outras características semânticas dos quantificadores. No nosso caso achamos que os triângulos são reveladores inclusive de propriedades de R. Façamos então uma breve apresentação dessa estratégia de Van Benthem.

[11] O primeiros com p.o representando de primeira ordem e o segundo com c representando a cardinalidade.
[12] Embora apresentada pelo autor como *"the tree of numbers"*.

4.2.1.1 Triângulo Numérico

Como já dissemos repetidamente aqui toda quantirrelação (ou quantificador $\langle 1, 1\rangle$) é uma relação entre dois conjuntos. O quantificador genérico Q é uma relação entre os conjunto $Q_M(A, B)$, essa relação é mais especificamente entre subconjuntos do domínio M (α e β) que estão relacionadas com A e B de alguma forma. Levando em conta a conservatividade na linguagem natural, e sobretudo essa propriedade em todos os quantificadores básicos abstratos, poderíamos propor $\alpha = A$ e $\beta = A \cap B$. Isso é, qual é a relação da parte de A intersecta com B com todo o conjunto A, restritor de domínio. Van Benthem propõe, no entanto, observar a relação entre a parte de A que é B e a que não é, levando em conta ainda assim o que interessa na relação entre A e B. Ou seja, assim como nos quantificadores que chamamos de cardinais $\alpha = (A - B)$ e $\beta = (A \cap B)$.



O que muda na observação desses conjuntos, no entanto, é que o que interessa especificamente é a cardinalidade de α e β. Assim, cada quantificador pode ser visto como um simples par de naturais ($|\alpha|$, $|\beta|$). Os números naturais nas posições de α e β já nos indicariam qual é o quantificador satisfeito em cada um dos casos. Vejamos alguns exemplos.

$$\text{Todo } |A - B| = 0 \Rightarrow |\alpha| = 0$$

$$\text{Algum } |A \cap B| \neq 0 \Rightarrow |\beta| > 0$$

$$\text{A Minoria } |A - B| > |A \cap B| \Rightarrow |\alpha| > |\beta|$$

$$\text{Metade } |A - B| = |A \cap B| \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$$

Visto assim, é possível distribuir todas as possibilidades de relações entre conjuntos em quantificadores cardinais no produto cartesiano dos naturais $\mathbb{N}^2$. A proposta de Van Benthem é apresentar essas possibilidades graficamente em um triângulo que na prática é $\mathbb{N}^2$ numa inclinação de 135°. Veja abaixo uma representação dos primeiros níveis desse triângulo.

Tabela 5 – Triângulo Numérico

							(0, 0)							
						(1, 0)		(0, 1)						
					(2, 0)		(1, 1)		(0. 2)					
				(3, 0)		(2, 1)		(1, 2)		(0, 3)				
			(4, 0)		(3, 1)		(2, 2)		(1, 3)		(0, 4)			
		(5, 0)		(4, 1)		(3, 2)		(2, 3)		(1, 4)		(0, 5)		
	(6, 0)		(5, 1)		(4, 2)		(3, 3)		(2, 4)		(1, 5)		(0, 6)	
.		.		.		.		.		.		.		.

Com essa distribuição é possível destacar os nós dessa árvore, ou os pares desse triângulo, onde os quantificadores são satisfeitos. Como exemplo, para cada triângulo abaixo (+) vai representar os pontos onde o quantificador destacado é satisfeito e (-) onde ele não é satisfeito. Dito de outra forma, os triângulos nos dizem em que conjuntos, levando em consideração suas cardinalidades, a relação R entre α e β expressa o quantificador Q em questão aplicado aos conjuntos A e B.

Tabela 6 – Representação de Quantificadores no Triângulo Numérico

(a) Algum

			−			
		−		+		
	−		+		+	
−		+		+		+
	−		+		+	
		−		+		
			−			

(b) Todo

			+			
		−		+		
	−		−		+	
−		−		−		+
	−		−		−	
		−		−		
			−			

$$\begin{array}{c} - \\ - \quad - \\ - \quad + \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad + \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad + \quad - \quad - \quad - \end{array}$$

(a) Metade

$$\begin{array}{c} + \\ + \quad - \\ + \quad - \quad - \\ + \quad - \quad - \quad - \\ + \quad - \quad - \quad - \quad - \\ + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{array}$$

(b) Nenhum

$$\begin{array}{c} - \\ - \quad + \\ - \quad - \quad + \\ - \quad - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \\ - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

(c) A Maioria

$$\begin{array}{c} - \\ + \quad - \\ + \quad - \quad - \\ + \quad + \quad - \quad - \\ + \quad + \quad - \quad - \quad - \\ + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \\ + \quad + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \end{array}$$

(d) A Minoria

Na aceitação de que um quantificador é definível cardinalmente, os triângulos trazem inúmeras vantagens. As combinações Booleanas podem ser vistas na interseção e união do (+) em duas pirâmides, e elas são, respectivamente, a conjunção e disjunção de dois quantificadores; a negação externa é a mera troca de símbolos (todos os + por − e todos os − por +); a negação interna é dada pela rotação no triângulo em 180° em torno do seu próprio eixo vertical. Por fim, o dual de um quantificador Q é a troca de símbolos no triângulo depois de realizada uma rotação de 180° – no mesmo triângulo – tendo como referência seu eixo vertical. Como já vimos essas combinações, especialmente as relacionadas à negação, também são apresentadas em um quadrado de oposições, sendo assim o principal interesse na representação dos quantificadores em triângulos numéricos é outra. Vimos na página 68 quatro formas como os quantificadores podem ser monotônicos. A perspectiva de Van Benthem, no entanto nos ajuda a perceber outras formas como os quantificadores podem ser monótonos, bem como demonstrar propriedades destes quantificadores. Considerando uma orientação polar no triângulo onde o nó (0, 0) é o norte podemos, além das monotonicidades ascendente à direita e à esquerda (MON↑ e ↑MON) e descendente à direita e à esquerda (MON↓ e ↓MON), temos ainda aqueles quantificadores

que têm a propriedade a partir de um certo ponto a Sudeste, Nordeste, Sudoeste e Noroeste do triângulo. Mas nós não vamos desenvolver essa explicação, nosso interesse central diz respeito à percepção dos quantificadores como pares de números e à relação R como uma relação entre esses números. Antes de encerrar esta subseção apresentaremos ainda mais um exemplo.

Na frase "Ao menos um terço dos profetas têm barba" a expressão "ao menos um terço" é uma quantificação, não um dos nossos quantificadores básicos e nem um dos nossos quantificadores numéricos, mas um daqueles que classificamos como proporcionais na seção 2.1. Na mesma seção 2.1 dissemos que não é uma boa estratégia associar quantificadores proporcionais aos quantificadores quase-precisos, por outro lado eles podem ser tratados como quantificadores tipo $\langle 1 \rangle$ ou $\langle 1, 1 \rangle$ como já discutimos. Lembrando a definição geral de um quantificador proporcional $\langle 1, 1 \rangle$ temos:

$$\langle 1, 1 \rangle \;\; [p/q]_M(A, B) \text{ sse } q.\,|A \cap B| \geq p.\,|A|.$$

O quantificador "Ao menos um terço", digamos $Q^{\geq \frac{1}{3}}$, então, pode ser expresso como:

$$Q^{\geq \frac{1}{3}}(A, B) \text{ sse } 3.\,|A \cap B| \geq 1.\,|A|$$

Isso permutado em termos de nossos α e β, nos daria $Q^{\geq \frac{1}{3}}(A, B)$ igual a:

$$3.(\beta) \geq (\alpha + \beta)$$

Isso nos daria o seguinte triângulo numérico para o quantificador:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & i & & & \\
 & & - & & + & & \\
 & - & & + & & + & \\
- & & + & & + & & + \\
 & - & & - & & + & \\
- & & - & & + & & + \\
 & - & & - & & + & \\
- & & - & & + & & +
\end{array}$$

Tabela 7 – Ao menos um terço

A depender da forma mais relevante de interpretar o nó (0, 0) alguém pode definir que lá o quantificador é satisfeito, não é satisfeito ou que isso é indiferente ou indeterminado.

Esse é um exemplo onde vemos que existem casos em que o R não é imediatamente dado por $|A - B|$ e $|A \cap B|$, mas ainda assim pode ser cardinalmente definido por uma relação da cardinalidade de α e β. Com isso retomamos à classificação que estávamos tentando estabelecer ao fim de 4.2.1.

4.2.2 Quantificadores não Cardinais

Se nos voltarmos aos quantificadores básicos e à classificação que começamos a apresentar em 4.2.1, temos a seguinte separação até aqui:

Ainda não classificados $\Rightarrow$ Quase Todos - Quase Nenhum - Grande Parte - Pequena Parte - Muitos - Poucos.

$\mathbf{R}_c$ $\Rightarrow$ A Maioria - A Minoria - A Metade - Quantificadores Proporcionais.

$\mathbf{R}_{p.o}$ $\Rightarrow$ Todo - Algum - Nenhum - Nem todo - Quantificadores Numéricos.

Em síntese, pela abordagem dos triângulos numéricos, podemos observar que as relações dos quantificadores que podem ser definidos em primeira ordem também podem ser entendidas cardinalmente, o inverso já vimos que não acontece. Existem quantificadores que ainda não estão dentro de qualquer categoria de relações R. Entre estes quantificadores não classificados ainda existem alguns que receberam algum tipo de formalização e a eles nos direcionaremos agora. Como já dissemos nos primeiros parágrafos de 4.1, elementos semânticos novos aparecem nas tentativas de definições de verdade que contemplem quantificadores até então não formalizados. É o caso de "Quase todos", esse quantificador nas suas distintas formalizações, introduziu a noção de Ultrafiltros no processo de interpretação. Lembremos a definição de Ultrafiltro.

Seja S um conjunto e $A, B \subseteq S$, dizemos que um conjunto $\mathcal{F}$ é um filtro de S, e é um Ultrafiltro (nesse caso $\mathcal{U}$) de S se, e somente se, atende às seguintes condições.

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $S \in \mathcal{F}$

ii) Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq S$, então $B \in \mathcal{F}$

iii) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$

iv) Para qualquer $A \subseteq S$, ou $A \in \mathcal{F}$ ou $(S - A) \in \mathcal{F}$, nesse caso $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Uma estrutura para esse quantificador agora é o seguinte trio ordenado $\mathcal{M} = \langle M, I, \mathcal{U} \rangle$, com $\langle M, I \rangle$ uma estrutura de primeira ordem e $\mathcal{U}$ um ultrafiltro do domínio M. A definição de verdade de uma sentença com o quantificador Q^{qt}[13], "Quase Todo", na forma $Q^{qt}x(\phi(x))$ é a seguinte:

$$\mathcal{M} \models Q^{qt}x(\phi(x)) \text{ sse } \phi^{x,\mathcal{M}} \in \mathcal{U}.$$

O quantificador Q^{qt} tem na sua condição de verdade uma relação entre a extensão da sentença no escopo do quantificador ($\phi(x)$) e o ultrafiltro (a família de conjuntos) $\mathcal{U}$ do domínio. O quantificador Q^{qt}, semanticamente é de tipo $\langle 1 \rangle$ nós, no entanto, desejamos tratar de quantirrelações. Dentro da nossa análise, o que nos interessa são as propriedades da relação R que é uma relação entre dois conjuntos. Considerar o Domínio como um dos conjuntos na relação é uma possibilidade, isso é, Q^{qt} é uma relação entre M e um subconjunto de M. A relação Q_{qt} é o par $\langle M, A \rangle$ sendo que $A \in \mathcal{U}$. Uma vez que A é um subconjunto próprio de M essa relação também pode ser vista a partir do seu caráter conservativo como a relação $Q_{qt}(M, A \cap M)$. Notar isso, em tese nos ajudaria a propor uma versão cardinal para o quantificador Q^{qt}, uma vez que sobre ISOM vale[14]:

$$Q_M(A) \text{ sse } Q(|M - A|, |A|).$$

Primeiro não precisamos fugir de nosso padrão em α e β como naturais para entender essa relação. Como já dissemos $A = (M \cap A)$ e isso quer dizer que podemos ao menos pensar em valores para alfa e beta numa relação $R(\alpha, \beta)$ para Q^{qt} mesmo com Q^{qt} sendo tipo $\langle 1 \rangle$. Assim a questão passa a ser em quais valores de α ($|M - A|$) e de β ($|M \cap A|$) o quantificador Q^{qt} é satisfeito? De volta à conservatividade sabemos que esses são os valores do conjunto restritor e sua parte em interseção com o conjunto da esquerda na sentença. Mas aqui se coloca um problema. Ao dividirmos o domínio na parte de M que é A e na que não é, teremos formas de relacionar esses conjuntos que ficam entre fixá-los a valores (relacioná-los a números) de α (Todo $\alpha = 0$) e β (Algum $\beta > 0$), relacioná-los ordenando-os ("a maioria" $\alpha < \beta$), ou ainda relacioná-los em proporções de um ou outro ("um terço dos A's são B's" $3.(\beta) \geq (\alpha + \beta)$). O problema dessas associações cardinais para o propósito de dizer em que valores Q^{qt} é satisfeito ou não é de que qualquer definição de que proporção $Q^{qt}(A, B)$ para que o conjunto $(A \cap B)$ seja "quase todo" o conjunto A vai colapsar com um quantificador proporcional e qualquer definição que atribua que $\alpha < \beta$ vai colapsar com o quantificador "A maioria". Dito de uma maneira um pouco mais radical, não vemos como esse quantificador poderia estar em uma relação cardinal no estilo proposto por Van Benthem.

[13] Aqui apresentamos Q^{qt} como uma simplificação do quantificador $\triangledown$ de Veloso e Carnielli.
[14] Como se pode observar em Westerståhl (2016)

Uma resposta direta a essa "visão radical" pode ser (embora tenhamos visto que a versão cardinal de um quantificador $\langle 1 \rangle$ é possível) que o problema é não termos levado em conta uma versão tipo $\langle 1, 1 \rangle$ de Q^{qt}. Sabemos da possibilidade de transformação de quantificadores de tipo $\langle 1 \rangle$ em quantificadores de tipo $\langle 1, 1 \rangle$ a partir de sua relativização apresentada em **1.4.2.a**. É provável que devamos tentar isso antes da "desclassificação" de Q^{qt} como quantificador cardinal.

4.2.2.1 Q^{qt} tipo $\langle 1, 1 \rangle$

O nosso problema a ser destacado é com a relativização da sentença $Q^{qt}x\phi(x)$ para uma sentença $Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x))$ como apresentamos em **1.4.2.a**. Observaremos que aqui especificamente esse processo pode requerer uma transformação da estrutura que temos. Acompanhemos esse problema passo por passo.

1) Um ultrafiltro é um ultrafiltro de um conjunto. Veja na definição que $\mathcal{U}$ é definido como um tipo específico de filtro $\mathcal{F}$, que por sua vez, é definido para um conjunto S. Sendo assim, se define um ultrafiltro para um conjunto e como vimos anteriormente esse conjunto é o domínio.

2) Seja $\mathbf{M} =< M, I >$ uma estrutura de primeira ordem uma estrutura para a lógica de Ultrafiltros é $\mathcal{M} =< \mathbf{M}, \mathcal{U} >$ onde $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre o domínio de $\mathbf{M}$.

3) Com isso temos uma definição de verdade de $Q^{qt}x\phi(x)$. seja $\phi^{x,M} = A$ a extensão de $\phi(x)$ em M,

$$Q^{qt}x\phi(x) = 1 \text{ sse } A \in \mathcal{U} \text{ [15]}.$$

   3.1) O quantificador Q^{qt} é tipo $\langle 1 \rangle$. A questão que pretendemos abordar é justamente se é possível relativizar para um tipo $\langle 1, 1 \rangle$ para termos sentenças $Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x))$.

   3.2) Vendo a partir das condições de verdade para esta sentença (Sendo $B = \psi^{x,M}$ a extensão de $\psi(x)$) então,

   $Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x)) = 1$ sse $B \in \mathcal{U}^A$. $\mathcal{U}^A$ é um ultrafiltro do conjunto A, extensão de $\phi(x)$ e subconjunto do domínio.

Aqui é necessária uma observação que apresenta uma certa distinção entre esse quantificador e alguns outros. Embora os quantificadores tratados aqui todos possuam a propriedade da CONS ($Q(A, B)$ *sse* $Q(A, A \cap B)$), o que nos mostra que a parte relevante do conjunto B é aquela intersecta ao conjunto A, essa partição do domínio

[15] Ou $\mathcal{M} \models Q^{qt}x\phi(x)$ sse $\phi^{x,M} \in \mathcal{U}^M$

parece ter ainda mais relevância aqui. Não é o conjunto B que é ultrafiltro de A na verdade, mas $A \cap B$. Isso quer dizer que essa abordagem no lugar de uma relação entre partes dá ênfase a uma propriedade de um conjunto. Dito de outro modo, "Quase todos A's são B's" é satisfeito se o conjunto $A \cap B$ tem a propriedade de "ser ultrafiltro de A" e não precisamente se A e B se relacionam de determinada forma. É claro que alguém pode argumentar que essa perspectiva "propriedade x relação" pode ser dada para qualquer quantificador[16], ou mesmo que a relação é justamente "ser Ultrafiltro de" (como nós mesmos estamos fazendo ao destacar categorias R propriedades dos quantificadores). Acontece que essa não é a questão posta. A questão é que: não é B que é um Ultrafiltro de A (ou está em relação com ele do modo que nos interessa), mas sim $A \cap B$. O que está em jogo aqui é que a abordagem em termos de Ultrafiltros ou famílias nos desloca um pouco a essa visão, a saber, a visão de propriedade no lugar da de relação. Nossas outras definições de quantificadores na perspectiva local envolviam apenas $\cap, =, \geq, -$ e $\in$ apenas na perspectiva global[17] mas agora temos uma definição local que depende de $\in$ e essa pode ser a razão. Assim refazemos a definição de verdade para:

$$Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x)) = 1 \text{ sse } (B \cap A) \in \mathcal{U}^A.$$

Aqui, ao que nos parece, se apresenta a face do problema nessa tentativa de relativização, qual seja: não há um ultrafiltro de A na nossa estrutura, mas tão somente um ultrafiltro do próprio domínio.

4) Como construir uma estrutura com ultrafiltros para qualquer subconjunto do domínio de $\mathcal{M}$? Isso é, para qualquer $X \subseteq M$ $(X \neq \emptyset)$ $\mathcal{U}^X$ deve estar no modelo em questão.

   4.1) Uma primeira proposta é compor essa estrutura de uma função que de subconjuntos do domínio para seus ultrafiltros no lugar de um ultrafiltro do domínio. $\mathcal{M} = \left\langle \mathbf{M}, \mathcal{U}^{\mathbf{f}} \right\rangle$ Onde $\mathcal{U}^{\mathbf{f}}$ é uma função de cada $X \subseteq M$ para U^X, isso é, $f{:}(\mathcal{U}(X)) \to \mathcal{U}^X$.

   4.2) Caso essa seja uma boa opção a nova condição de verdade para o quantificador Q^{qt} seria:

$$Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x)) = 1 \text{ sse } (A \cap B) \in \mathcal{U}^{\mathbf{f}}(A)^{18}.$$

[16] "Todo A é B" interpretado como "A se relaciona com B de modo que $A \cap B = A$" ou "A tem a propriedade de ser igual a $A \cap B$"

[17] $Q^{Ma}(A, B)$ localmente quer dizer que $(A \cap B) > (A - B)$, e globalmente que o par ordenado $\langle A, B \rangle$ pertence $(\in)$ ao conjunto $\mathbf{Q}^{Ma}$ que é a família de todos os conjuntos que respeitam a propriedade local em foco.

[18] Isso é, $\mathcal{U}^{\mathbf{f}}(A) \to U^A$ e $(A \cap B) \in \mathcal{U}^A$.

Considerada a possibilidade da relativização é necessário ver como fica a relação R mais uma vez. A relação seria "β é um ultrafiltro de A". A relação é entre conjuntos e não entre cardinalidades deles, mais uma vez devemos reconhecer que o formato triângulo numérico não é possível aqui. Não vimos espaço para categorização do quantificador "quase todo" como sendo da categoria de R_c, isso não quer dizer que não seja possível identificar propriedades de uma relação R para esse quantificador. Na proposta que vimos anteriormente, de formalização de, Q^{qt} a relação R pode ser compreendida como "é um ultrafiltro de", mais diretamente $R(\alpha, \beta)$:

$$B \cap A\ (\beta) \text{ é um ultrafiltro de } A\ (\alpha + \beta)^{19}.$$

4.2.3 Categorias R_f e R_e, o quadro definitivo.

Precisamos então entender que tipo de relação R está em questão aqui, e para além disso, se existe alguma propriedade desta relação comum a outros quantificadores de forma que tenhamos identificado uma nova categoria. De fato, a simples conclusão de que Q^{qt} não possui propriedades determinadas para R_c já abre caminho a uma nova categoria de relações diferente das outras duas, uma vez que mesmo os quantificadores em $R_{p.o}$ podem ser entendidos cardinalmente, mas aqui teríamos um tipo de quantificador básico abstrato não expressável em primeira ordem nem cardinalmente, isso é, possivelmente nem em segunda ordem.

Ao propor uma categoria R_f (com f para nos trazer à memória a ideia de filtros) para "quase todos" a nossa tentação é de associar o quantificador "quase nenhum" a essa perspectiva, uma vez que como ultrafiltro modela a ideia de um conjunto que se aproxima da totalidade do domínio a noção de ideal se faz o mesmo com um conjunto que aproxima do vazio. Nosso novo quadro por propriedades seria como abaixo.

Ainda não classificados $\Rightarrow$ Grande Parte - Pequena Parte - Muitos - Poucos.

$\mathbf{R}_f$ $\Rightarrow$ Quase Todos - Quase Nenhum.

$\mathbf{R}_c$ $\Rightarrow$ A Maioria - A Minoria - A Metade - Quantificadores Proporcionais.

$\mathbf{R}_{p.o}$ $\Rightarrow$ Todo - Algum - Nenhum - Nem todo - Quantificadores Numéricos.

[19] A forma vale quando "quase todos" é interpretado com tipo $\langle 1, 1 \rangle$.

Ainda que consideremos uma categoria R_f, nosso quadro de quantificadores básicos abstratos permanece contando com alguns quantificadores não classificados. Tratamos desde nossa introdução das dificuldades de determinar limites para "grande" e "pequena parte", distinguimos vagueza e sensibilidade ao contexto (ao falarmos sobre indexicais e ambiguidades) no capítulo 3 e agora achamos ser possível apresentar uma forma de compreender esses quantificadores. A ideia central é a de que existe uma chance de não tratar esses quantificadores como sensíveis ao contexto. Quando os colocamos em uma escala aceitável podemos construir uma interpretação global até mesmo para esses quantificadores. O que faremos é considerar que estes quantificadores possuem casos de fronteira, mas que são limitados à aplicação de outros quantificadores. Isso é, quando for necessário dizer que "grande parte dos A's são B's" o que eu vou dizer é que no "máximo uma quantidade menor do que a maioria e no mínimo uma quantidade maior do que a minoria dos A's são B's" e os quantificadores "A Maioria" e "A Minoria" já têm definições próprias. Mas veremos isso com um pouco mais de detalhes na próxima seção.

É importante, nesse momento, ter uma visão panorâmica do quadro que estamos desenhando aqui. Tratamos no capítulo 3 do problema da imprecisão nos termos "Muitos" e "Poucos" e das dificuldades em propor posições escalares para os quantificadores associados a esses termos. Com essa perspectiva, apresentamos abaixo nossa última versão da tabela de categorias de R ou mais especificamente uma tabela que separa os quantificadores básicos abstratos a partir de suas propriedades.

Contextuais $\Rightarrow$ Muitos - Poucos.

$\mathbf{R}_e$ $\Rightarrow$ Grande Parte - Pequena Parte.

$\mathbf{R}_f$ $\Rightarrow$ Quase Todos - Quase Nenhum.

$\mathbf{R}_c$ $\Rightarrow$ A Maioria - A Minoria - A Metade - Quantificadores Proporcionais.

$\mathbf{R}_{p.o}$ $\Rightarrow$ Todo - Algum - Nenhum - Nem todo - Quantificadores Numéricos.

Mesmo depois de tudo, dois quantificadores ainda estão sem qualquer propriedade definida R, são os quantificadores que chamamos de contextuais (ou não escalares). A falta

de uma propriedade pode dar ideia de que eles não foram classificados ainda ou que sua propriedade mais fundamental, como dizemos aqui, sua categoria R, foi negligenciada ou que esses quantificadores nem deveriam ser abordados, já que são tão distintos dos termos investigados aqui. Nossa intenção, na verdade, era a de ter esses quantificadores como limite. Limite de precisão ou de fato casos de fronteira (agora entre os quantificadores) do que pretendíamos defender aqui. Isso deve nos ajudar a apresentar uma definição mais geral sobre os quantificadores básicos abstratos.

Entendemos que os quantificadores básicos abstratos são distinguíveis uns dos outros a partir de duas propriedades fundamentais. Primeiro, por serem escalares ou não-escalares. Definimos as quantificações escalares como aquelas passíveis de posicionamento dentro de uma escala tipo Horn. E segundo, por terem uma medida posicional. A medida posicional se dá em uma organização em mais à esquerda e mais à direita a partir de um limite de relevância de aplicação. As quantificações não escalares estão divididas em apenas duas medidas: positiva e negativa, ou + e - simplesmente. O que determina o que chamamos de limite de aplicação de relevância é o limite em que um quantificador é mais aceito do que outro em um determinado contexto pela convenção estabelecida, seja ela qual for. Bem, esse é o lugar na escala onde o falante decide que não faz mais sentido usar uma determinada quantificação e sim uma outra. Nessa perspectiva, a única ideia categórica é a de que independente do contexto, a ordem dos quantificadores em escala é a seguinte.

Todo
Quase Todo
A Maioria
Grande Parte
A Minoria
Pequena Parte
Quase Nenhum
Algum

Em símbolos $\left\langle Q^{\forall}, Q^{qt}, Q^{Ma}, Q^{gp}, Q^{Mi}, Q^{pp}, Q^{qn}, Q^{\exists} \right\rangle$

O fato de os quantificadores “Muitos” e “Poucos” serem contextuais, absolutamente dependentes de um domínio, também tem reflexo nas suas possibilidades de definição, tornando esses quantificadores menos precisos que os demais, ou melhor, completamente

imprecisos[20]. Partindo assim da ótica da precisão, podemos dizer que existe também uma distinção entre esses quantificadores. Os precisos por si, ou simplesmente precisos, os precisos em função e de outros ou quase-precisos e os imprecisos.

Nível de precisão	**Quantificadores**
Imprecisos	Muitos - Poucos.
Quase-precisos	Grande Parte - Pequena Parte
Precisos	Quase Todos - Quase Nenhum. A Maioria - A Minoria - A Metade Quantificadores Proporcionais. Todo - Algum - Nenhum Nem todo - Quantificadores Numéricos.

Subvertemos um pouco a ordem e demos uma olhada nas conclusões antes mesmo de termos especificado bem todas as categorias. Mas agora retomemos às categorias R_f e R_e. Pretendemos apenas indicar uma ideia de como seria possível uma estrutura e uma definição de verdade para quantificadores da categoria R_e. Como vimos, os quantificadores da categoria R_c em sua definição têm algo a mais do que a estrutura de $R_{p.o}$, mas mantém certos elementos de uma estrutura de primeira ordem. Isso quer dizer que estamos enriquecendo as estruturas para conseguirmos nossas definições. É o que faremos aqui, mas nesse momento utilizando ainda mais recursos do que os que já fizemos uso. Vamos discutir algumas peculiaridades da categoria R_e.

Primeiro, os quantificadores desta categoria são definidos em função de outros quantificadores. O que queremos dizer com isso é que esses quantificadores não possuem definição explícita, nem condição de verdade, a não ser que tenhamos uma definição prévia dos outros quantificadores relacionados a eles. Veja o fragmento de nossa escala onde aparece o quantificador "pequena parte" (Q^{pp}).

$$\left\langle Q^{Mi}, Q^{pp}, Q^{qn} \right\rangle$$

Uma vez que tenhamos uma definição de "A Minoria dos A's são B's."($Q^{Mi}(A, B)$) e uma de "Quase Nenhum A é B." ($Q^{qn}(A, B)$) podemos dizer que $Q^{pp}(A, B)$ é a sentença que faz sentido quando alguém quer expressar ao mesmo tempo uma quantidade distinta e (ainda menor) de uma minoria simples (pouco menos do que a metade ou 50% - 1), mas não que tão pequena a ponto de que "B seja um Ideal de A".

[20] É claro que essa classificação só é possível dentro do parâmetro que usamos para tratar a precisão. "Muito" e "Pouco" são termos que informam bem os ouvintes dentro de um contexto, nesse sentido é difícil ver como são imprecisos, por outro lado, levando em consideração nossa tentativa de definição é viável dizer que essas expressões são, de fato, imprecisas.

Segundo, a especificação desses quantificadores faz uso de propriedades de quantificadores que já não são definíveis em primeira ordem eles mesmos, isto é, na definição da categoria R_e usamos quantificadores da categoria R_c e R_f. Destarte, os quantificadores de R_e, se essa for uma boa estratégia de definição, são definíveis em 3° ordem.

Terceiro, os quantificadores desta categoria pressupõem um princípio de relevância de uso ou aplicação. Ao mesmo tempo que estamos dando a ideia de abandonar contextos específicos ao dizer que eles não são necessariamente sensíveis ao contexto, estamos propondo uma espécie de super contexto, mas este, por sua vez, dado pelas constantes que são os próprios quantificadores. A ideia de super contexto é muito nebulosa, uma analogia grosseira poderia ser feita com a perspectiva de dimensão na estrutura de uma escala [21]. A analogia é grosseira primeiramente porque a escala de Horn é uma escala pragmática.

4.2.3.1 Uma estrutura para a categoria R_e

O primeiro passo é entender em que condição esses quantificadores são comparáveis, ou encontrar um padrão, ou uma dimensão onde isso ocorra, onde eles possam ser comparáveis. Uma comparação possível é aquela relativa aos conjuntos que são extensões desses quantificadores. Isso é, se um quantificador generalizado $\langle 1,1\rangle$ qualquer Q^x é definido como:

$$\mathbf{M} \models Q^x_x(\phi(x), \psi(x)) \ sse \ \left\langle \phi^{\mathbf{M},x}, \psi^{\mathbf{M},x} \right\rangle \in \mathbf{Q}^x$$

O conjunto $\mathbf{Q}^x$, por sua vez, está contido no produto cartesiano do domínio de $\mathbf{M}$, isso é $\mathbf{Q}^x \subseteq M^2$, mas localmente corresponde a uma relação, que pode ser igual ao conjunto restritor, a uma parte dele (o restritor) ou a uma relação entre restritor e restringido. O ponto é, se é possível definir dois quantificadores cujas extensões sejam as famílias de conjuntos $\mathbf{Q}^x$ e $\mathbf{Q}^y$, então podemos propor um critério de comparação entre esses conjuntos, ou melhor, imaginar uma dimensão em que eles sejam comparáveis e organizá-los de modo escalar. Primeiro, ponhamos de uma forma explícita o que quer dizer para cada quantificador já definido pertencer a uma família de conjuntos.

Sejam $\phi^{\mathbf{M},x} = A$ e $\psi^{\mathbf{M},x} = B$. Conforme nossa notação $Q^{\exists}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) \in \mathbf{Q}^{\exists}$. Assim, para que $Q^{\exists}$ funcione em uma versão $\langle 1,1\rangle$ do existencial clássico, definimos que:

$$(A \cap B) \in \mathbf{Q}^{\exists} \text{ sse } (A \cap B) \neq \emptyset.$$

[21] A estrutura de uma escala S é um trio ordenado $S = \langle D, \prec, DIM\rangle$ em que D é o domínio, $\prec$ uma relação de ordem em D e DIM uma dimensão (SOLT, 2015).

Da mesma forma, $Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $A \cap B \in \mathbf{Q}^{\forall}$, e como já dissemos, $A \cap B \in \mathbf{Q}^{\forall}$ sse $A \subseteq B$. Portanto, para que $Q^{\forall}$ seja interpretado como uma versão $\langle 1, 1\rangle$ do universal clássico, definimos:

$$A \cap B \in \mathbf{Q}^{\forall} \text{ sse } A \cap B = A.$$

Lembre que aqui usamos a notação Q^{qt} para um quantificador "quase todo". Temos então $Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $A \cap B \in \mathbf{Q}^{qt}$ e o conjunto $\mathbf{Q}^{qt} = \mathcal{U}^A$, onde $\mathcal{U}^A$ é um ultrafiltro de A. Assim, levando em conta o debate realizado em 4.2.2.1, para que Q^{qt} seja interpretado como uma versão $\langle 1, 1\rangle$ do quantificador $\triangledown$, definimos:

$$A \cap B \in \mathbf{Q}^{qt} \text{ sse } A \cap B \in \mathcal{U}^A.$$

Para o caso do nosso quantificador "A maioria" $Q^{Ma}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\langle A, B\rangle \in \mathbf{Q}^{Ma}$ o par é definido pela relação $|A \cap B| > |A - B|$. Assim para "A Maioria" e "A Minoria", analogamente, quantificadores definidos primitivavente como de tipo $\langle 1, 1\rangle$, definimos:

$$\langle A, B\rangle \in \mathbf{Q}^{Ma} \text{ sse } |A \cap B| > |A - B| \text{ e } \langle A, B\rangle \in \mathbf{Q}^{Mi} \text{ sse } |A - B| > |A \cap B|$$

Por fim para o quantificador Q^{qn} (Quase Nenhum), $Q^{qn}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) \in \mathbf{Q}^{qn}$. Já dissemos aqui que pensamos em $\mathbf{Q}^{qn}$ como sendo uma família de ideais $\mathcal{I}$, e $\mathcal{I}^A$ é um ideal de A. É possível tentar pensar essa propriedade em termos de complemento e manter somente a noção de ultrafiltros na estrutura. No entanto, não parece ser viável identificar $\mathcal{I}^A$ com o complemento de $\mathcal{U}^A$. Isso porque esse tal complemento é $(P(A) - \mathcal{U}^A)$, posto que $\mathcal{U}^A \subset P(A)$, o que comportaria subconjuntos de A com exatamente metade dos elementos de A, o que não é desejável na extensão do quantificador "quase nenhum". Pensando nos elementos de $\mathcal{U}^A$, por outro lado, não faria sentido pensar, por exemplo, que o complemento de $A \cap B$ é que pertence ao ultrafiltro de A. Isso porque o complemento de $A \cap B$ é $M - (A \cap B)$ e quando $A \cap B \in \mathcal{U}^A$ o complemento de $A \cap B$ pode corresponder mesmo a um conjunto maior do que A e pior do que isso não ter relação com A. A opção para manter $\mathcal{U}^A$ como referência na definição de "quase nenhum A é B" seria "a parte de A que não é B é um ultrafiltro de A", assim teríamos:

$$(A \cap B) \in \mathbf{Q}^{qn} \text{ sse } (A - B) \in \mathcal{U}^A$$

As famílias definidas acima deixam de fora os quantificadores "grande (boa) parte" Q^{gp} e "pequena parte" Q^{pp}. Da maneira como nós propomos a interpretação desses quantificadores, os conjuntos, que são famílias a defini-los, $\mathbf{Q}^{gp}$ e $\mathbf{Q}^{pp}$, têm seu significado delimitado por outros como começamos a desenhar abaixo.

$$(\mathbf{Q}^{gp}) \Rightarrow \mathbf{Q}^{Ma} \gg \mathbf{Q}^{gp} \gg \mathbf{Q}^{Mi}$$

$$(\mathbf{Q}^{pp}) \Rightarrow \mathbf{Q}^{Mi} \gg \mathbf{Q}^{pp} \gg \mathbf{Q}^{qn}.$$

As setas (») aqui estão substituindo a relação $\geq$ com um certo propósito, mas antes de ver isso, precisamos ainda compreender este ordenamento. Para o quantificador Q^{gp} estamos dizendo que faz sentido expressar "grande parte" toda vez que estamos falando que uma quantidade que "ainda não é a maioria, mas minoria ainda expressa algo diferente do que queremos dizer". Numericamente parece que só "metade" cumpre esses requisitos, por isso é importante ressaltar o caráter de relevância no uso do quantificador. Isso é, não estamos dizendo que "grande parte" corresponde a 50% de um total, mas que pode ser, não que corresponda a 80, 70, 40 ou 30%, mas podemos nos referir a essas quantidades como grande parte, contanto que seja relevante. Estar entre "A Maioria e "A Minoria" é também possuir uma propriedade que parece aceitável para tal quantificador, a saber, a de que no mesmo domínio seja possível que "Grande parte dos A's sejam B's" e que "Grande parte dos A's não sejam B's"[22]. Nossa escala respeita basicamente uma certa[23] relação de subordinação, e como na relação aristotélica, a existência de "grande parte dos A's que sejam B's" nos garante, pelo menos a existência de uma quantidade que corresponda à "minoria dos A's que sendo B's".

Antes de discutir o fragmento da escala relativo a "pequena parte" vejamos o "propósito" que dissemos existir em usar » no lugar de $\geq$. O que ocorre aqui é que não são exatamente os valores que são "menores do que a maioria" e "maiores que a minoria" mas é a compreensão de relevância do falante que determina isso. Os quantificadores parecem passar a ter significados em, digamos, dimensões distintas. Enquanto definidos isoladamente os quantificadores Q^{qt} e Q^{Ma} são ambos bons o suficiente para descrever "A maioria". Se, no entanto, eu preciso separar um limite aceitável para o uso de "A maioria" do limite para o uso de uma expressão com "Quase todo", também preciso estabelecer que a partir de uma "linha de fronteira", o que eu digo com o quantificador definido por ultrafiltros Q^{qt} representa algo a mais do que eu digo ao usar o quantificador definido pelo conjunto de pares ordenados Q^{Ma}.

Essa separação entre a dimensão de definição do quantificador, por si, e da definição do quantificador, junto com outros, ou no contexto dos quantificadores, é que torna razoável dizer coisas que poderiam ser lidas como conflitantes como: "Quase todos é mais do que a maioria" (pensando pragmaticamente), "Quase todos é maioria" e "A maioria pode

[22] Pense no exemplo que já usamos sobre eleições muito disputadas onde se pode dizer que "Grande parte dos eleitores votou no candidato João" e ao mesmo tempo se pode dizer que "Grande parte dos eleitores não votou no candidato João".

[23] Mas não exatamente a mesma como veremos logo mais.

ser, inclusive, quase todos" (numericamente nos dois últimos casos). Só existe limite de fronteira nessa nossa perspectiva da relevância. Uma tentativa numérica de limitar as coisas nos carregaria para o equívoco de dizer que "quase todo" é maior do que "a maioria" e "a maioria" é maior do que "a metade". O que é maior numericamente do que um valor maior do que a metade? A não ser que se estabeleça um limitante numérico novo, mas aí teremos um problema que nos soa ainda maior. Quando tratamos dos quantificadores proporcionais estávamos querendo indicar que é inócuo tentar uma associação entre quantificadores básicos abstratos e frações ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, etc.) e por isso apresentamos tentativas fracassadas e recorremos em seguida a outras saídas. A nossa "saída", por outro lado, reconhece que os quantificadores "grande parte" e "pequena parte" não têm significado independentemente dos outros quantificadores. Em um certo sentido, eles não são "semanticamente completos". Seus significados são subsidiários dos significados de outros quantificadores! Esse é seu aspecto de colocação em uma modalidade nem precisa e nem imprecisa.

A observação de que » não é a relação $\geq$ é ainda mais importante no entendimento do segundo fragmento ($\mathbf{Q}^{Mi}$ » $\mathbf{Q}^{pp}$ » $\mathbf{Q}^{qn}$). Não existe quantidade "menor do que a minoria" para que pudéssemos dizer que $\mathbf{Q}^{Mi} \geq \mathbf{Q}^{pp}$. Assim, mais uma vez notamos que na nossa relação » estamos indicando que temos um "limite de fronteira" para a aplicação relevante de tais quantificadores, mas não um limite numérico. Estamos dizendo sim que: até "aqui" faz sentido dizer "isso", mas passando daqui não faz mais. O "aqui" é o limite de fronteira, o "isso", um quantificador. O termo "aqui" é um indexical puro, com conteúdo e caráter[24]. O conteúdo é a quantidade que se apresentar na ocasião, o caráter é dado justamente pela regra que determina que não é relevante usar o quantificador anterior ou posterior em nossa escala.

A observação feita acima é importante para entender que não se trata de classificar o quantificador pelo limite de quantidade que o define, pois essa característica dos quantificadores quasi-precisos é contextual. Mas se trata de estabelecer uma medida ou escala que (posto que é muito pretensioso pensar que seja fechada sobre algum morfismo) pelo menos seja aplicável em diversos contextos com domínios de cardinalidades distintas. Como fim dessa problematização podemos notar onde essa relação (») perde a propriedade da subordinação em algum ponto. Em certo sentido "Quase nenhum" implica "A minoria", esse sentido especificamente está dado na definição por si dos quantificadores precisos Q^{Mi} e Q^{qn}. Acontece que no significado intra-escalar dos quantificadores quando eu posso garantir "quase nenhum" eu não posso garantir "A minoria". Dito de uma forma mais aberta, quando é relevante dizer "quase nenhum", a ideia de "A minoria" representaria uma quantidade maior do que o que se deseja expressar. Isso quer dizer que para nossa finalidade se faz necessária uma medida ou um índice onde as relações $\geq$ e $\leq$ possam ser usados, uma vez que a relação » é aquela tal relação pragmática e precisamos de uma

[24] *Ver página* 105

definição que transporte a escala que desejamos expressar.

Assim, estamos de volta ao projeto de construção de uma estrutura. Caso » fosse uma relação bem definida nossa primeira tentativa em dar sentido aos quantificadores em questão seria algo como as condições de verdade abaixo. Onde $\mathbf{Q}^{x(A,B)}$ é a extensão do quantificador restrita aos conjuntos A e B.

Todo A é B $Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $A \cap B = A$

Quase todo A é B $Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $A \cap B \in \mathcal{U}^A$

A Maioria dos A's são B's $Q^{Ma}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) > (A - B)$

Grande parte dos A's são B's $Q^{gp}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mathbf{Q}^{Ma(A,B)}$ » $(A \cap B)$ » $\mathbf{Q}^{Mi(A,B)}$[25]

A Minoria dos A's são B's $Q^{Mi}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) < (A - B)$

Pequena parte dos A's são B's $Q^{pp}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mathbf{Q}^{Mi(A,B)}$ » $(A - B)$ » $\mathcal{U}^A$

Quase nenhum dos A's é B $Q^{qn}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) \in \mathcal{I}^A$ ou $(A - B) \in \mathcal{U}^A$

Algum A é B $Q^{\exists}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $(A \cap B) \neq \emptyset$

Nesse ponto, podemos começar a esclarecer a proposta para a representação de » em uma estrutura. Na realidade, de uma estrutura que introduza nossa noção de escala. Como as condições dos quantificadores escalares envolvem relações que não temos nas estruturas até agora, nós propomos incrementar nossa estrutura com uma medida para cada (tipo de) conjunto que é extensão de quantificadores. Assim estabeleceremos relações de ordem entre as medidas de tais conjuntos. De imediato pode-se pensar que podemos acrescentar uma medida a uma estrutura de ultrafiltros e *voilà*:

$$\mathcal{M} = \left\langle \mathbf{M}, \mathcal{U}^{\mathbf{f}}, \mathcal{B}, \mu \right\rangle$$
$$\mathcal{B} = \left\langle \mathcal{U}^{\mathbf{f}} \right\rangle$$

Seria simples assim propor uma estrutura com medida sob os quantificadores? Vamos problematizar um pouco a ideia de medida de quantificadores na subseção abaixo.

[25] Usamos aqui a notação $\mathbf{Q}^{Ma(A,B)}$ para dizer que tratamos da extensão do quantificador relativo à sua aplicação aos conjuntos A e B. Essa delimitação se deve ao fato de que na definição dos conjuntos $\mathbf{Q}^{gp}$ e $\mathbf{Q}^{pp}$ não levamos em conta a extensão de maioria ou minoria, mas uma parte dessa família de conjuntos. O mesmo vale para $\mathbf{Q}^{Mi(A,B)}$.

4.2.3.2 Especificando a Medida

O termo medida, junto com a notação que usaremos, pode causar alguma confusão que precisa ser dissipada por antecipação. Não estamos propondo o uso da teoria da medida na implementação de um novo quantificador como em Cruz-Filipe et al. (2008) e Mio, Skrzypczak e Michalewski (2017). De fato nem sabemos se seria possível estabelecer uma medida de Lebesgue para todos os quantificadores apresentados aqui, em especial o quantificador "grande parte". Vamos esclarecer essa suspeita, sobre Q^{gp}, depois de uma explicação superficial, que fazemos logo abaixo, sobre como compreendemos a teoria da medida.

Podemos dizer que a teoria da medida generaliza o conceito de medida de sólidos, que remonta a Euclides, abstraindo as ideias de figuras, faces e segmento de retas de modo a compreendê-las como intervalos e tais intervalos como conjuntos de pontos, que são subconjuntos de produtos cartesianos dos reais. Isso é, o conjunto E, ao qual se atribui a medida $m|E|$ de uma figura com d dimensões, é um subconjunto de $\mathbb{R}^d$. A medida de um conjunto elementar E, $m|E|$, é a soma dos pontos num intervalo, elementos do conjunto E quando $d = 1$ e a soma dos produtos cartesianos de intervalos quando $d > 1$. A primeira generalização de uma medida elementar é a medida de Jordan, que amplia as possibilidades de mensura aumentando as possibilidades de conjuntos mensuráveis e assim as possibilidades de figuras, e naturalmente, o espaço em questão. Podemos pensar em sólidos bem simples, como um triângulo, e notar por exemplo que mensurar suas dimensões d não é o suficiente para uma medida precisa e que leve em conta a medição interna e externa desse sólido. A ideia da medida de Jordan é de que essa medida, mais complexa, é dada pelo mínimo da medida externa e o máximo da medida interna da figura. Pensando em termos de conjuntos, as medidas de um conjunto B são conhecidas se soubermos as medidas elementares de conjuntos A e C, tal que $A \subset B \subset C$. A estratégia apresentada por Jordan se aplica a conjuntos limitados, nesse sentido a primeira ampliação realizada por Lebesgue é uma troca da medida externa, a medida do conjunto C acima, por uma que possa ser inclusive infinita, o que acontece porque essa medida passa a aceitar que C seja enumerável quando para Jordan esse era um conjunto finito. Essa é a visão mais breve e simplificada que se pode ter da noção de medida e se deve à introdução ao tema dada por Tao (2011, p. 2, 3). O que nos interessa disso é o fato de que, a partir dessa teoria, conjuntos podem ser mensurados para os mais diversos fins.

Nas percepções acima sobre as medidas, tanto de Jordan quanto de Lebesgue, o domínio (ou espaço) ainda é muito centrado na ideia de que os conjuntos sejam figuras (formas), uma generalização da teoria da medida, ainda devida a Lebesgue, propõe que esses espaços sejam menos restritos. Parece o caso que uma definição de medida para quantificadores não prescinda de um espaço abstrato. Tao (2011, p. 79) diz que um espaço abstrato só é definido onde se especificam os seguintes dados:

(i) Uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X sobre a qual é permitida a mensura; e

(ii) Uma medida $\mu(E) \in [0; +\infty]$ atribuída a cada conjunto mensurável $E \in \mathcal{B}$.

A dificuldade que enfrentamos é na coleção sobre a qual é "permitido" mensurar. Na teoria da medida essa exigência é traduzida como exite uma σ-álgebra sobre $\mathcal{B}$. Para uma coleção de subconjuntos de um conjunto X, $\mathcal{B}$, uma σ-álgebra, é definida como segue.

1. $\emptyset$, $X \in \mathcal{B}$
2. Se $A \in \mathcal{B}$, então $(X - A) \in \mathcal{B}$
3. Qualquer união contável de conjuntos $(A_1...) \subset \mathcal{B}$ pertence a $\mathcal{B}$.

Enquanto o ponto 1 é uma simples determinação, para 2 e 3 é necessário saber se os conjuntos (sub conjuntos de X) individualmente são mensuráveis. Evans e Gariepy (2015, p. 2) apresenta a seguinte definição de um conjunto mensurável.

$$A \subset X \text{ é } \mu\text{-mensurável se para todo conjunto } B \subset X:$$
$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$$

Essa definição é muito próxima da dada para uma σ-álgebra. Isso porque três valores básicos podem ser dados ao conjunto B para que se observe a "mensurabilidade" de A, esses valores são: $B = X$, como domínio, $B = \emptyset$ e uma cardinalidade n qualquer. Observemos abaixo as medidas de A para um conjunto A arbitrário:

Tabela 8 – A medida de A

B	$\mu(B \cap A)$	$+$	$\mu(B - A)$
$\emptyset$	0	0	0
n	$\leq n$	$\leq n$	$\leq n$
X	$\mu(A)$	$\mu(X)$	$\mu(X - A)$

Fundamental nos dois casos, isso é, seja para uma σ-álgebra (uma família de conjuntos) ou para um conjunto A, é que A tenha um complemento bem definido. O quantificador "grande parte", quando interpretado como uma família de conjuntos $\mathbf{Q}^{gp}$ tem difícil interpretação, especialmente na definição de seu complemento. Aqui entendemos que o conjunto X em questão é (ou seria) o conjunto das extensões dos quantificadores, isso é, $X = \left\{Q^{\forall}, Q^{qt},\ Q^{Ma}, Q^{gp}, Q^{Mi},\ Q^{pp},\ Q^{qn},\ Q^{\exists}\right\}$. O conjunto A corresponde ao conjunto

$\mathbf{Q}^{gp}$ e o conjunto B no teste, também é uma família de conjuntos, mais especificamente a extensão de um quantificador qualquer entre os nossos. Considere que com $\mathbf{Q}^{\leq \mathbf{n}}$ estejamos querendo dizer um quantificador no máximo na posição de n na mesma ordem de X. Vejamos o teste da medida em $\mathbf{Q}^{gp}$.

$$\mathbf{Q}^{gp} \subset X \text{ é } \mu\text{-mensurável se para todo conjunto } \mathbf{Q} \subset X:$$
$$\mu(\mathbf{Q}) = \mu(\mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}^{gp}) + \mu(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{gp})$$

Tabela 9 – A medida de $\mathbf{Q}^{gp}$

B	$\mu(B \cap \mathbf{Q}^{gp})$	$+$	$\mu(B - \mathbf{Q}^{gp})$
$\emptyset$	0	0	0
$\mathbf{Q^n}$	$\mathbf{Q}^{\leq \mathbf{n}}$	$\mathbf{Q}^{\leq \mathbf{n}}$	$\mathbf{Q}^{\leq \mathbf{n}}$
$\mathbf{Q}^{\forall}$	$\mu(\mathbf{Q}^{gp})$	?	$\mu(\mathbf{Q}^{pp})$, $\mu(\mathbf{Q}^{gp})$, $\mu(\mathbf{Q}^{Ma})$

4.2.4 Uma medida Escalar

Dados os esclarecimentos anteriores e uma primeira ideia vaga sobre nossa relação – para qual adotamos a notação » – em 139 vamos estabelecer como mediremos nossos conjuntos. A questão que se impõe é, naturalmente, que tipo de medida pode ser considerada para conjuntos de naturezas tão distintas quanto conjuntos de indivíduos ($\mathbf{Q}^{\exists}$ e $\mathbf{Q}^{\forall}$), conjuntos de pares ordenados ($\mathbf{Q}^{Ma}$ e $\mathbf{Q}^{Mi}$) e conjuntos que são ultrafiltros de outros ($\mathbf{Q}^{qt}$ e $\mathbf{Q}^{qn}$). Em muitos casos em teoria da medida, o intervalo (aberto ou fechado) considerado é [0, 1], mas como já dissemos, não estamos aqui no paradigma da teoria da medida. Nossa sugestão é uma medida que tenha como base um conjunto de indivíduos, A que seja restritor, isso é, o conjunto extensão do argumento da esquerda nas sentenças do tipo $Q(A, B)$. Assim, estabelecemos $m|X|$ como sendo a medida simples de um conjunto X e $\mu|X|$ é a Medida de um conjunto quando ele envolve medidas simples de outros conjuntos. Por exemplo, sabendo que o conjunto $\mathbf{Q}^x$ é sempre uma família de conjuntos, a medida de $\mathbf{Q}^x$ é sempre uma medida $\mu|\mathbf{Q}^x|$. Indo então ao ponto:

Se $X = A$ e A é um conjunto restritor estabelecemos:

- A medida simples de A é a medida da soma de todos os elementos de A. Então $m|A| = m|e_1| + ... + m|e_n| = 1$. E para cada e_i e e_j, $m|e_i| = m|e_j|$ [26].

- A medida simples de um conjunto B tal que $B \subset A$ é $m|B| = m|e_1| + ... + m|e_l| < 1$, sendo $l < n$ e n a cardinalidade de A. Assim $m|B| < 1$.

[26] Também pode ser lido como: para cada e_i, $m|e_i| = \frac{1}{n}$ e n é a quantidade de elementos em A.

- Medida $\mu|\mathcal{U}| = m|X_1| + ...m|X_n|/X_1, ..., X_n \in \mathcal{U} > m|A|$, isso é, quando $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro de A, $\mu|U| > 1$.

- A Medida de $\mu|A^n|$ quando $n > 1$ é $m|A|.n$ ou $m|A_1| + ... + m|A_n|$. Então $m|A^{n>1}| = m|n| = n$ no nosso caso específico $n = 2$.

Note que no fim das contas, temos as quatro possibilidades de medidas abaixo apresentadas.

$$\mu|\mathbf{Q}^x| = \begin{cases} 1 \Rightarrow \mu|\mathbf{Q}^x| = m|A| \\ < 1 \Rightarrow \mu|\mathbf{Q}^x| = m|B| \\ > 1 \Rightarrow \mu|\mathbf{Q}^x| = \mu|\mathcal{U}^A| \\ 2 \Rightarrow \mu|\mathbf{Q}^x| = \mu|A^2| \end{cases}$$

A seguir nós vemos quais quantificadores estão associados a quais medidas, sendo que os quantificadores com medida > 1 foram destacados como $1.n$ e os quantificadores para os quais não temos medida, por não termos interpretação até o momento, como e, em referência à nossa categoria R_e.

$$\left\langle \begin{array}{cccccccc} Q^{\forall}, & Q^{qt}, & Q^{Ma}, & Q^{gp}, & Q^{Mi}, & Q^{pp}, & Q^{qn}, & Q^{\exists} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1, & 1.n, & 2, & e, & 2, & e, & 1.n, & > 1 \end{array} \right\rangle$$

A escala tem relação com as extensões dos quantificadores, mas como podemos observar, ela não está presente nas medidas adotadas. Isso é, não existe uma relação linear de ordem entre as medidas. O que dá a distinção entre os quantificadores escalares que descrevemos com a medida "e", é a posição dessas duas medidas. Distinguir o quantificador Q^{gp} do Q^{pp} na escala é observar que o primeiro está entre duas medias 2 e outro entre as medias 2 e $1.n$. As relações entre as famílias $\mathbf{Q}^{Ma} \gg \mathbf{Q}^{gp} \gg \mathbf{Q}^{Mi}$ e $\mathbf{Q}^{Mi} \gg \mathbf{Q}^{pp} \gg \mathbf{Q}^{qn}$ nos dois fragmentos pode ser realizada.

Finalmente, apresentamos condições de verdade que acreditamos interpretar a noção de escala e os quantificadores da categoria R_e.

$Q^{\forall}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| = \mu|A|$
$Q^{qt}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| = \mu|\mathcal{U}^A|$
$Q^{Ma}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| > \mu|A - B|$
$Q^{gp}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|\mathbf{Q}^{Ma(A,B)}| \geq \mu|A \cap B| \geq \mu|\mathbf{Q}^{Mi(A,B)}|$
$Q^{Mi}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| < \mu|A - B|$

$Q^{pp}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|\mathbf{Q}^{Mi(A,B)}| \geq \mu|A - B| \geq \mu|\mathcal{U}^A|$
$Q^{qn}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| = \mu|\mathcal{I}^A|$ ou $\mu|A - B| = \mu|\mathcal{U}^A|$
$Q^{\exists}x(\phi(x), \psi(x))$ sse $\mu|A \cap B| \neq \emptyset$

Sem desdobrar essas definições, que são um ponto de partida em, se não todos, "quase todos", a "maioria" ou pelo menos "grande parte" dos trabalhos de lógica, faremos nossas considerações sobre os objetivos "pre-interpretativos" que perseguimos em nossa tese.

4.3 Considerações Finais

Iniciamos esse trabalho com uma explanação sobre os primeiros capítulos de *The Logical basis of metaphysics* de Michael Dummett. Como é fácil de notar, expusemos, ali no primeiro capítulo, apenas as motivações de Dummett para uma teoria do significado. Embora a razão principal para isso tenha sido o fato de que aderimos à motivação do autor – para um projeto distinto, é verdade – queríamos especialmente destacar uma percepção de Dummett que foi vital para todo o trabalho: A caracterização completa do significado de um termo – possivelmente incluindo a caracterização lógica – não se restringe ao conjunto de suas caracterizações (genuinamente) semânticas e inferenciais. Dummett nos fez acreditar que a noção pressemântica de interpretação não só existe, como é digna de atenção. Um argumento contrário a isso seria o de que essa noção, se existe, é mero fruto da intuição e a lógica será reflexo dela. Mas essa noção, ou as razões para estabelecermos "formas lógicas", são irrelevantes para uma lógica. Essa posição não teria mais peso do que a posição contrária, fosse ela posta de forma tão arbitrária. Acreditamos que nossa posição, no entanto, conquista um pouco mais de respaldo ao navegar nos limites entre "semântica genuína", pressemântica e gramática com a finalidade de apontar caminhos. Nossas considerações e conclusões são, por isso, sobre caminhos.

Esta proposta final de formalização da noção de escala – baseada, mas não encerrada, na escala de Horn – aponta um pouco das condições em que admitimos[27] que uma sentença (com quantificador Básico Abstrato) é verdadeira ou não (seu conteúdo assertórico). A proposta, por outro lado, não parece dizer muito sobre o papel dessas sentenças (ou mesmo das expressões quantificadoras) na definição de verdade de outras (seu ingrediente do sentido). É possível conceder nisso. Seja porque a caracterização sintática dos quantificadores é de empréstimo de uma tradição (da teoria da quantificação generalizada), seja porque não se desenvolve uma teoria inferencial dos novos quantificadores – diga-se por honestidade, apenas dois "grande parte" e "pequena parte" – seja, finalmente,

[27] Nessa situação em que a pragmática tem muita influência, provavelmente seja mais adequado dizer "admitimos ser verdadeira" no lugar de "sabemos ser verdadeira".

porque não se elabora um sistema. Um ponto a destacar em nosso favor, ainda assim, é que esses quantificadores são definidos pelo comportamento que têm em conjunto com outros, por essa razão não seria possível uma crítica no sentido de que eles foram tão artificialmente e arbitrariamente pensados que só fazem sentido em pleno isolamento ideal de todo o restante da lógica. Vale destacar que uma crítica na perspectiva composicional sobre esse tipo de quantificador se amplifica e atinge muitas outras abordagens.

Duas coisas eram nossas preocupações mais claras na realização da pesquisa. Primeiro a predominância da crença da falta de critério para a definição de certos quantificadores, consistindo na crença de que sua natureza impunha que fossem absolutamente vagos; e segundo a falta de reconhecimento de níveis de vagueza desses quantificadores. Em suma, as crenças de que "há quantificadores definíveis e outros não e, além disso, os que não são definíveis não podem ser diferenciados entre si". Não dispomos de uma fonte mas do histórico do problema para saber que essa não é uma posição em que somos vanguardistas. A despeito disso, nossas hipóteses foram exploradas aqui de modo a distinguir os quantificadores que a ortodoxia considera precisos, de outros, que em que podemos descrever algumas condições de uso – aos quais chamamos de quasi-precisos – e daqueles que, supomos, não podem ter seu significado minimamente isolado de um contexto – e que chamamos de imprecisos, por força da classificação. Para enfrentar esse desafio foi necessário falar e problemas na definição dos termos em 1.4.1, nos limites de uma lógica em expressar tais termos 1.4.2 e então ter o reconhecimento da estranheza de certas expressões quantificadoras no ambiente lógico. Daí para frente quantificadores não-lógicos, ou que não se adequem a uma critério de logicidade, perdem espaço e no limite até o merecimento de um tratamento formal. A não ser que exista um espaço, ainda que mínimo, para questionar conceitos como "Neutralidade Tópica" e "Constância" e foi o que decidimos fazer em 1.4.3.

É no momento em que declaramos ser possível suspender a crença sobre o paradigma da logicidade que um outro caminho pode, e deve, ser buscado. Apresentamos algumas propostas menos ortodoxas para a definição de quantificadores ainda centradas em sistemas lógicos, mas só pudemos esclarecer nossa intuição ao discutir um pouco de filosofia da linguagem no capítulo 3. Tratamos lá das noções que a pragmática pode introduzir no debate e finalizamos o trabalho, por contraditório que possa parecer, propondo quantificadores que em conjunto dão significado uns a outros. A contradição a que nos referimos é a de que apresentamos críticas a algumas abordagens de quantificadores, no entanto trouxemos alguns deles para nossa definição. O fato é que críticas, ou meras problematizações, feitas a abordagens não consistem em críticas às definições ou à qualidade das propostas. Contudo, consistem em críticas aos limites desta ou daquela abordagem, isoladamente, na compreensão do significado dos quantificadores.

Restringimos nosso escopo a quantificadores naturais, centrados em uma língua

apenas, além disso ainda restringimos esse conjunto a alguns poucos que denominamos Básicos Abstratos. Mas o caráter de generalidade que pretendemos para nossa proposta foi explicitado. Juntamos esses quantificadores pela capacidade que eles têm de atingir diversos casos de quantificação e pela capacidade de composição com outros (sendo composição aqui entendida *lato sensu*). Que existam quantificadores diferentes, de "uso mais comum" no português, mais relevantes sob algum prisma, mais complexamente definíveis não temos dúvidas. O que nos arriscamos a dizer, sabendo que não há prova disso no texto, é que eles estarão numa das três categorias de precisão apontadas (isso quando não estiverem ainda entre aquelas categorias que chamamos R).

Reconhecemos uma série de questões que não saberíamos responder. Uma em especial grita: existe uma lógica dos quantificadores quasi-precisos? O que podemos indicar é que se for possível uma lógica de um quantificador não-lógico, teremos falhado no trabalho de classificar esses quantificadores, mas parece que estivemos certos em duvidar da noção de logicidade. Além disso que essa seria uma lógica de ordem superior, a julgar pela quantidade de operações que se aplicam a outras operações dentro de uma estrutura. Mas a cada vez que for necessário expor essa falta de resposta é também importante expor o fato de que o objetivo do trabalho é de precisificação dos termos e sobre como explicar o que eles significam e não de reduzi-los a constantes lógicas. Somente no caso dessa questão ter uma resposta positiva, outras estariam na agenda do dia, como, "esses quantificadores realmente se comportam bem em um sistema?", "alguns deles não iriam colapsar inferencialmente?", "é possível que esses quantificadores funcionem como operadores modais de sistemas distintos que foram postos juntos?", "os novos quantificadores têm comportamento não-clássico de algum tipo?", "de que tipo?".

Questões sobre as premissas pragmáticas da tese também podem surgir, em especial sobre o estabelecimento da escala como ela se apresenta aqui. Ao abrir mão de escalas previamente determinada demos razões para não admitir a participação dos quantificadores imprecisos numa escala. Fizemos isso desde nossos exemplos da introdução, mas ainda assim é possível que se argumente: existe uma outra via para a definição do que se entende por "muitos" e "poucos" que é a via cognitiva. De fato, grandes projetos de psicolinguística como o Panamath.org que fazem uso de ANS (*Approximate Number System*) podem vir a apresentar uma definição desses quantificadores baseados em pesquisas empíricas. Caso isso aconteça nada muda no argumento de que o entendimento desses quantificadores é dado contextualmente. É possível inclusive que se encontre uma categorização mais robusta dos três tipos de quantificadores, aqueles que estão no âmbito da semântica (ou são definíveis semanticamente), os que estão no âmbito da pragmática e os que estão ou são tratáveis no âmbito da linguística cognitiva. Finalizaremos este trabalho fazendo o que normalmente se requer nas primeiras linhas, dizendo para que serve. Vimos que os desvios de compreensão, maliciosos ou não, de nossa introdução podem ser dissolvidos pelas máximas de Grice, se de alguma forma nossa noção de relevância (com respeito a

quantificações) se torna explícita, também fica explícito quando o que se diz é ou não "aplicável". Sendo certo pensar assim, e em sendo boa nossa perspectiva, abrimos espaço para o tratamento dessas questões de maneira mais precisa e ajudar, por exemplo, na resolução de questões do processamento de linguagem desses termos. Mas essa posição não determina um lugar onde se quer chegar e tão somente o que se prometeu no primeiro parágrafo destas considerações, um caminho.

Referências

BARWISE, J.; COOPER, R. Generalized quantifiers and natural language. In: *Philosophy, language, and artificial intelligence*. [S.l.]: Springer, 1981. p. 241–301. Citado 10 vezes nas páginas 18, 19, 20, 34, 52, 57, 83, 84, 85 e 119.

BARWISE, J.; FEFERMAN, S.; FEFERMAN, S. *Model-theoretic logics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. v. 8. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 85.

BARWISE, J.; KAUFMANN, M.; MAKKAI, M. Stationary logic. *Annals of Mathematical Logic*, Elsevier, v. 13, n. 2, p. 171–224, 1978. Citado na página 85.

BENTHEM, J. V. Questions about quantifiers 1. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, v. 49, n. 2, p. 443–466, 1984. Citado na página 122.

BENTHEM, J. van. Logical constants, the variable fortunes of an elusive notion. *Reflections on the foundations of mathematics: Essays in honor of Solomon Feferman*, Lecture Notes in Logic, v. 15, p. 420–440, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 62, 64 e 65.

BRAUN, D. Indexicals. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2017. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017. Citado na página 106.

CARNIELLI, W. A.; EPSTEIN, R. L. *Pensamento crítico: o poder da lógica e da argumentação*. [S.l.]: Rideel, 2010. Citado na página 95.

CARNIELLI, W. A.; VELOSO, P. A. Ultrafilter logic and generic reasoning. In: SPRINGER. *Kurt Gödel Colloquium on Computational Logic and Proof Theory*. [S.l.], 1997. p. 34–53. Citado 5 vezes nas páginas 86, 87, 88, 90 e 91.

CARVALHO, A. de et al. Scalar implicatures: the psychological reality of scales. *Frontiers in psychology*, Frontiers, v. 7, p. 1500, 2016. Citado na página 113.

CHANG, C. C.; KEISLER, H. J. *Model theory*. [S.l.]: Elsevier, 1990. v. 73. Citado na página 52.

CHIERCHIA, G. *Semântica*. [S.l.]: Editora da UNICAMP & Editora da UEL, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 47 e 95.

CHIERCHIA, G. *Logic in grammar: Polarity, free choice, and intervention*. [S.l.]: OUP Oxford, 2013. Citado na página 112.

CHIERCHIA, G. et al. Scalar implicatures, polarity phenomena, and the syntax/pragmatics interface. *Structures and beyond*, Oxford, UK, v. 3, p. 39–103, 2004. Citado na página 112.

COLLINS, C. Scalar modifiers of quantifier phrases. 2017. Disponível em: <https://ling.auf.net/lingbuzz/003682>. Citado na página 84.

CRUZ-FILIPE, L. et al. Complete axiomatization of discrete-measure almost-everywhere quantification. *Journal of Logic and Computation*, Dov Gabbay, v. 18, n. 6, p. 885–911, 2008. Citado na página 140.

DUMMETT, M. *The logical basis of metaphysics*. [S.l.]: Harvard university press, 1991. Citado 7 vezes nas páginas 28, 29, 30, 31, 32, 36 e 98.

EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions*. [S.l.]: Chapman and Hall/CRC, 2015. Citado na página 141.

FAUCONNIER, G. Polarity and the scale principle. *Proceedings of Chicago*, 1975. Citado na página 111.

FEFERMAN, S. et al. Logic, logics, and logicism. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, University of Notre Dame, v. 40, n. 1, p. 31–54, 1999. Citado na página 63.

FINTEL, K. V. *Restrictions on quantifier domains*. Tese (Doutorado) — University of Massachusetts at Amherst Amherst, 1994. Citado na página 106.

GEURTS, B. Scalar implicature and local pragmatics. *Mind & Language*, Wiley Online Library, v. 24, n. 1, p. 51–79, 2009. Citado na página 112.

GRACIO, M. C. C. *Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza*. Tese (Doutorado), 1999. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.

GRÁCIO, M. C. C.; FEITOSA, H. de A.; NASCIMENTO, M. C. do. "muitos": Formalizando um conceito impreciso. *Revista Eletrônica Informação e Cognição*, v. 5, n. 2, p. 20–28, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 92 e 93.

GRANDY, R. E. Sortals. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016. Citado na página 101.

GRICE, H. P. et al. Logic and conversation. *1975*, p. 41–58, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 23, 107 e 108.

GUIMARãES, M. R. *Dos intensificadores como qualificadores: os âmbitos de expressão da quantificação no português do Brasil*. Tese (Doutorado) — UFPR, 2006. Citado na página 18.

HODGES, W. et al. *A shorter model theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997. Citado na página 52.

HYDE, D.; RAFFMAN, D. Sorites paradox. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018. Citado na página 98.

IPPOLITO, M. Embedded implicatures? remarks on the debate between globalist and localist theories. *Semantics and Pragmatics*, v. 3, p. 5–1, 2010. Citado na página 112.

KAPLAN, D. et al. *Themes from Kaplan*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 105 e 106.

KEENAN, E. Standard and non-standard quantifiers in natural language. In: *Proceedings of the York conference on Types of Quantification*. [S.l.: s.n.], 2004. Citado na página 74.

KEENAN, E. L. Further excursions in natural logic: The mid-point theorems. *Logic for Linguistic Structures, Berlin: Mouton de Gruyter*, p. 87–104, 2008. Citado na página 74.

KEENAN, E. L.; STAVI, J. A semantic characterization of natural language determiners. *Linguistics and philosophy*, Springer, v. 9, n. 3, p. 253–326, 1986. Citado na página 121.

KEISLER, H. J. Logic with the quantifier "there exist uncountably many". *Annals of Mathematical Logic*, North-Holland, v. 1, n. 1, p. 1–93, 1970. Citado na página 85.

KIM, J. The sortal resemblance problem. *Canadian Journal of Philosophy*, Taylor & Francis, v. 44, n. 3-4, p. 407–424, 2014. Citado na página 104.

KNEALE, W. C. *O desenvolvimento da lógica*. [S.l.: s.n.], 1968. Citado na página 22.

KRYNICKI, M.; MOSTOWSKI, M. Ambiguous quantifiers, ms. *Dept. of Philosophy, Univ. of Warsaw*, 1993. Citado na página 38.

LEVINSON, S. C. *Pragmática. Trad. Luis Carlos Borges e Aníbal Mari*. [S.l.]: Martins Fontes, 2007. Citado na página 110.

LOWE, E. More kinds of being: A further study of individuation, identity, and the logic of sortal terms. 2009. Citado 3 vezes nas páginas 100, 102 e 104.

MATSUMOTO, Y. The conversational condition on horn scales. *Linguistics and philosophy*, JSTOR, p. 21–60, 1995. Citado na página 111.

MCKEON, M. W. *The concept of logical consequence: an introduction to philosophical logic*. [S.l.]: Peter Lang, 2010. v. 207. Citado 6 vezes nas páginas 40, 45, 66, 101, 103 e 104.

MIO, M.; SKRZYPCZAK, M.; MICHALEWSKI, H. Monadic second order logic with measure and category quantifiers. *arXiv preprint arXiv:1702.04769*, 2017. Citado na página 140.

PETERS, S.; WESTERST, D. *Quantifiers in language and logic*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 22 vezes nas páginas 18, 33, 35, 36, 38, 40, 41, 44, 46, 49, 50, 57, 59, 62, 63, 67, 70, 75, 78, 80, 86 e 118.

PIETROSKI, P. et al. The meaning of 'most': Semantics, numerosity and psychology. *Mind & Language*, Wiley Online Library, v. 24, n. 5, p. 554–585, 2009. Citado na página 112.

POTTS, L. C. Embedded scalar implicatures: phenomena and approaches. 2012. Citado na página 112.

RECANATI, F. Embedded implicatures. *Philosophical perspectives*, 2003. Citado na página 112.

RESCHER, N. Plurality quantification. *Journal of Symbolic Logic*, v. 27, n. 3, p. 373–374, 1962. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 92.

RESCHER, N. Plurality quantification revisited. *Philosophical inquiry*, v. 26, n. 1/2, p. 1–6, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

RUFFINO, M. Indexicais. Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2014. Citado na página 106.

RUSSELL, B. Against grammatical computation of scalar implicatures. *Journal of semantics*, Oxford University Press, v. 23, n. 4, p. 361–382, 2006. Citado na página 112.

SANTOS, R. Vagueza. 2015. Citado 3 vezes nas páginas 95, 97 e 99.

SAUERLAND, U. Intermediate scalar implicatures. In: *Pragmatics, semantics and the case of scalar implicatures*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 72–98. Citado na página 112.

SHAPIRO, S. *Vagueness in context*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 98.

SHELAH, S. Generalized quantifiers and compact logic. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 204, p. 342–364, 1975. Citado na página 85.

SOLT, S. Measurement scales in natural language. *Language and Linguistics Compass*, Wiley Online Library, v. 9, n. 1, p. 14–32, 2015. Citado na página 135.

SORENSEN, R. Vagueness. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2018. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2018. Citado na página 100.

STANLEY, J.; SZABÓ, Z. G. On quantifier domain restriction. *Mind & Language*, Wiley Online Library, v. 15, n. 2-3, p. 219–261, 2000. Citado na página 106.

SZYMANIK, J. *Quantifiers and cognition: Logical and computational perspectives*. [S.l.]: Springer, 2016. v. 96. Citado 6 vezes nas páginas 33, 38, 40, 46, 57 e 73.

TAO, T. *An introduction to measure theory*. [S.l.]: American Mathematical Society Providence, 2011. v. 126. Citado na página 140.

VELOSO, P. A. On a logic for 'almost all' and 'generic'reasoning. *Manuscrito*, v. 25, n. 1, p. 191–271, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 88, 90 e 91.

WALLACE, J. R. Sortal predicates and quantification. *The Journal of Philosophy*, JSTOR, v. 62, n. 1, p. 8–13, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 100 e 101.

WESTERSTåHL, D. Quantifiers in formal and natural languages. In: *Handbook of philosophical logic*. [S.l.]: Springer, 2007. p. 223–338. Citado 8 vezes nas páginas 36, 40, 56, 57, 58, 60, 61 e 121.

WESTERSTåHL, D. Generalized quantifiers. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2016. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 128.

Apêndices

APÊNDICE A – $Q^{\forall}$ não é INT

Demonstração do contraexemplo da figura 4.

1) Tomando o antecedente de **1.3.d** como hipótese, temos $A \cap B = A' \cap B'$.

2) Por I, II e (1) temos $A = B'$.

2.1) Supondo $Q^{\forall}(A, B)$ temos $A \subseteq B$ pela definição deste quantificador na primeira página da seção.

2.2) Agora notemos que não é possível que $A' \subset B'$, uma vez que se esse fosse o caso $A' \cap B' \neq B'$, por isso, ou $A' \supset B'$ ou $A' = B'$ ou $B' = \emptyset$.

2.2.1) Caso $B' = \emptyset$, então $\neg Q^{\forall}(A', B')$.

2.2.2) Supondo que $A' = B'$ temos por 2 que $A = A'$.

2.2.3) Por 2.2.2 e III temos $B \subseteq A$.

2.2.4) De 2.2.3 e da suposição 2.1 obtemos $A = B$, mas isso é contraditório com IV.

2.3) De 2.2 e 2.2.1 a 2.2.4 obtemos $A' \supset B'$ que é o mesmo que $\neg Q^{\forall}(A', B')$.

3) Supomos $A \cap B = A' \cap B'$ e de $Q^{\forall}(A, B)$ chegamos a $\neg Q^{\forall}(A', B')$. O que contraria a possibilidade de o quantificador $Q^{\forall}$ ser INT.

APÊNDICE B – Interdefinição entre $\forall$ e $Q^{\forall}$

Todo modelo $\mathbf{M}$ se ϕ é uma fórmula onde $\forall$ é o operador principal existe uma fórmula ψ onde $Q^{\forall}$ é o operador principal e $\mathbf{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$ e da mesma forma, para todo modelo se ψ é uma fórmula onde $Q^{\forall}$ é o operador principal, existe uma fórmula ϕ onde onde $\forall$ é o operador principal e $\mathbf{M} \models \phi \leftrightarrow \psi$. Levando em consideração que as fórmulas são construídas recursivamente o caso abstrato se aplica a qualquer fórmula de qualquer complexidade.

Para toda sentença ϕ da forma $\forall x B(x)$ temos uma fórmula ψ da forma $Q^{\forall} x(x = x, A(x))$.

A sentença ϕ da forma $\forall x B(x)$ é definida como para todo x do domínio $x \in B$ e a sentença ψ da forma $Q^{\forall} x(A(x), B(x))$ é definida, como vimos, para dois conjuntos A e B do domínio $A \subseteq B$, se considerarmos A como $x = x$ temos que A é igual ao próprio domínio, isso é, a sentença ψ é para todo x do domínio, $x \in B$.

Para toda sentença ψ da forma $Q^{\forall} x(A(x), B(x))$ temos uma fórmula da forma $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$.

A sentença ψ da forma $Q^{\forall} x(A(x), B(x))$ é definida como para dois conjuntos A e B do domínio $A \subseteq B$. Bom isso quer dizer em um nível mais refinado que todos os elementos de A também são elementos de B, ou melhor, para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$ e essa é a definição de ϕ da forma $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$.